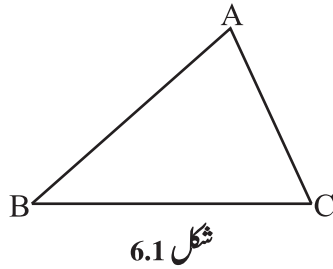




4714CH06

مثلث اور اس کی خصوصیات



شکل 6.1

6.1 تعارف (Introduction)

آپ نے دیکھا ہے کہ ایک مثلث تین قطعات خط کی ایک سادہ بند شکل ہوتی ہے۔

اس میں تین راسیں تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔

یہاں $\triangle ABC$ دیا گیا ہے۔ (تصویر 6.1) اس میں

اضلاع: $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$

زاویے: $\angle BAC$ ، $\angle ABC$ ، $\angle BCA$

راسیں: A, B, C

راس A کا متقابل ضلع BC ہے۔ کیا آپ ضلع AB کا متقابل زاویہ بتا سکتے ہیں؟
آپ مثلث کی مختلف قسمیں بھی جانتے ہیں۔

(i) ضلعوں کے اعتبار سے مختلف الاضلاع، مساوی الساقین اور مساوی الاضلاع

(ii) اوپر دیے گئے مثلثوں کی طرح کے کچھ ماڈل کاٹ کر بنائیے۔ اپنے ماڈل کا موازنہ اپنے دوستوں کے ماڈل سے کیجیے۔ اور

اس پر بحث کیجیے۔

کوشش کیجیے:

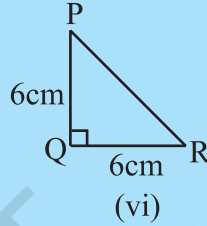
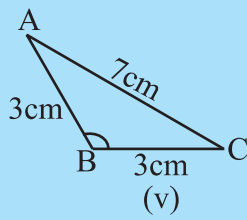
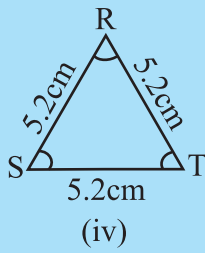
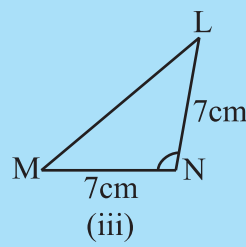
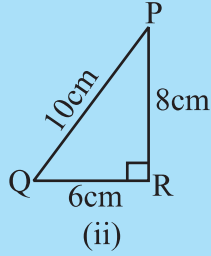
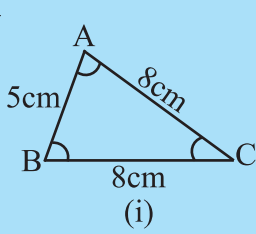
1- $\triangle ABC$ کے 6 حصے لکھیے۔ (یعنی تین اضلاع اور تین زاویے)۔

2- لکھیے:

(i) $\triangle PQR$ میں راس Q کا متقابل ضلع۔

(ii) $\triangle LMN$ میں ضلع LM کا متقابل راس۔





شکل 6.2

3- تصویر 6.2 کو دیکھیے ہر مثلث کی درجہ بندی کیجیے۔

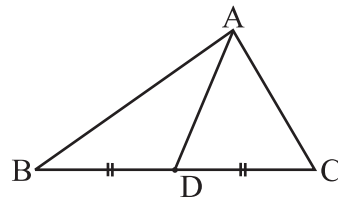
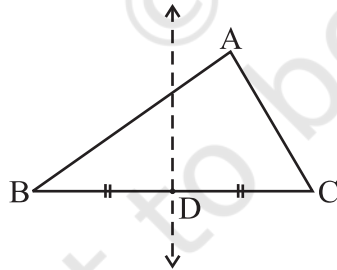
(i) ضلعوں کے اعتبار سے

(ii) زاویوں کے اعتبار سے

آئیے مثلثوں کے متعلق مزید کچھ جانتے ہیں۔

6.2 ایک مثلث کے وسطانیے (Medians of a Triangle)

آپ جانتے ہیں کہ ایک دی گئی قطعہ خط کا عمودی ناصف، کاغذ موڑ کر کیسے بنایا جاسکتا ہے۔ ایک کاغذ کا ABC کا ٹیپ (تصویر 6.3) کوئی بھی ایک ضلع لیجیے۔ مان لیجیے BC کاغذ موڑ کر BC کا عمودی ناصف بنائیے۔ کاغذ کا موڑ BC سے اس کے بیچ کا نقطہ D پر مل رہا ہے۔ AD کو ملائیے۔



شکل 6.3

قطعہ خط AD، BC کے درمیانی نقطہ کو متقابل راس A سے، ملانے پر، مثلث کا ایک وسطانیہ کہلاتا ہے۔

ضلع AB اور CA کو دیکھیے اور مثلث کے دو اور وسطانیے معلوم کیجیے۔

مثلث کے کسی بھی راس کو اس کے متقابل ضلع کے درمیانی نقطہ سے جوڑنے والے خط کو وسطانیہ کہتے ہیں۔



سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1- ایک مثلث کے کتنے وسطانیے ہوتے ہیں؟

2- کیا ایک وسطانیہ پوری طرح سے مثلث کے اندر پایا جاتا ہے؟ (اگر آپ کو لگتا ہے کہ یہ درست نہیں ہے تو ایسی کسی حالت کی شکل

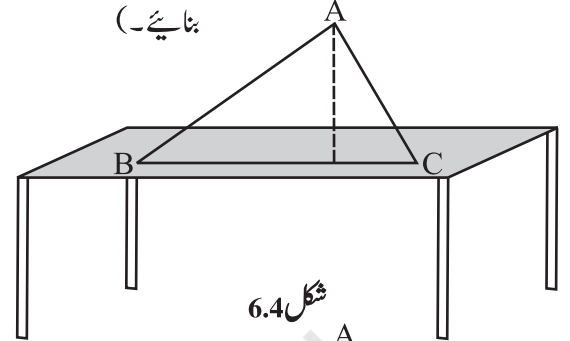
بنائیے۔)

6.3 مثلث کا ارتفاع (Altitudes of a Triangle)

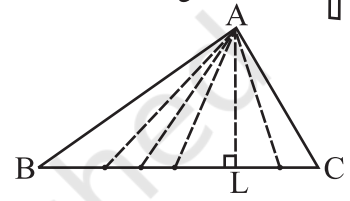
گئے کا ایک مثلث نما ABC بنائیے۔ اس کو ایک میز پر کھڑا کر دیجیے۔ مثلث کتنا اونچا ہے؟ یہ اونچائی راس سے قاعدہ BC کے درمیان کا فاصلہ ہے۔

A سے BC ہر آپ بہت سے خطوط کھینچ سکتے ہیں (شکل 6.5 دیکھئے)۔ ان میں سے کون سا خط اس کی اونچائی دکھا رہا ہے۔

اونچائی وہ قطعہ خط ہے جو A سے BC پر بالکل سیدھی کھینچی ہوئی ہے اور جو BC پر عمود ہے۔ کسی ارتفاع کا ایک سرا مثلث کے راس پر ہوتا ہے اور دوسرا سرا متقابل ضلع پر ہوتا ہے۔ ہر راس سے ایک ارتفاع کھینچا جاسکتا ہے۔



شکل 6.4

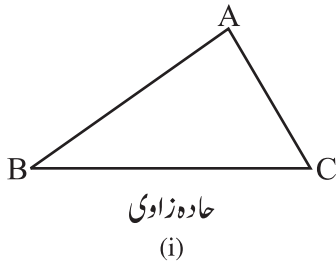


شکل 6.5

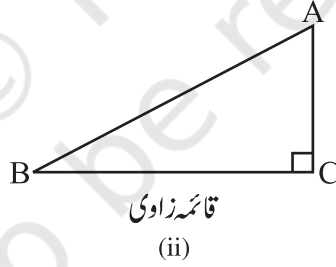
سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1- ایک مثلث کے کتنے ارتفاع ہو سکتے ہیں؟

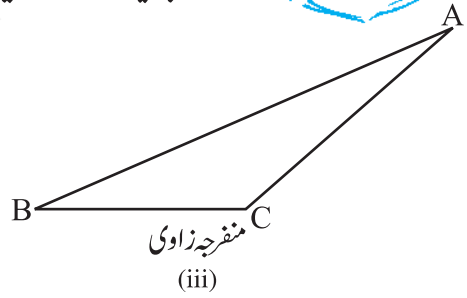
2- مندرجہ ذیل مثلثوں کے لیے A سے BC پر بننے والے ارتفاع کے کچھ راس کھینچ بنائیے۔



(i)



(ii)



(iii)

شکل 6.6

3- کیا کسی مثلث کا ارتفاع اس کے اندرون میں پایا جاتا ہے؟ اگر آپ سمجھتے ہیں کہ یہ درست نہیں ہے تو ایسی صورت حال کو دکھانے کے لیے ایک راس کھینچ بنائیے۔

4- کیا آپ ایسا کوئی مثلث سوچ سکتے ہیں جس کے دو ارتفاع اس کے دو ضلع ہوں؟

5- کیا کسی مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ ایک ہو سکتا ہے؟ (اشارہ: سوال نمبر 4 اور 5 کے لیے مثلث کی ہر قسم میں ارتفاع بنائیے اور جانچئے)۔

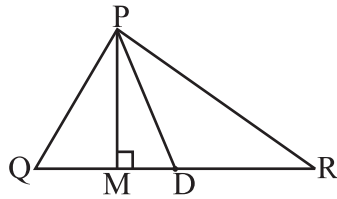
خود کریں

درج ذیل میں ہر ایک کے کئی اشکال کاٹیے۔



- (i) مساوی الاضلاع مثلث (ii) مساوی الساقین مثلث
(iii) مختلف الاضلاع مثلث
- ان کے وسطانیے اور ارتفاع معلوم کیجیے۔ کیا آپ نے ان میں کوئی خاص بات دیکھی؟ اپنے دوستوں سے اس بارے میں بات کیجیے۔

مشق 6.1

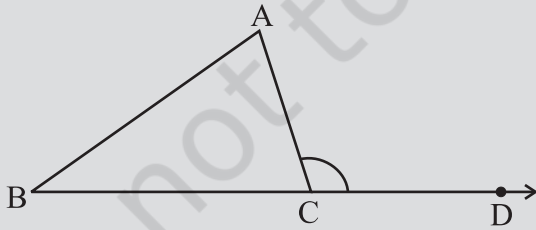


- 1- ΔPQR میں $\overline{QR}$ کا درمیانی نقطہ D ہے۔
 $\overline{PM}$ _____ ہے۔
 $\overline{PD}$ _____ ہے۔
 کیا $QM = MR$ ہے؟
 2- مندرجہ ذیل کی رفاں شکلیں بنائیے۔
 (a) ΔABC ایک وسطانیہ ہے۔
 (b) ΔPQR میں PQ اور BR مثلث کے ارتفاع ہیں۔
 (c) ΔXYZ میں YL مثلث کے بیرون میں ایک ارتفاع ہے۔
 3- ڈائیگرام بنا کر تصدیق کیجیے کہ کسی مساوی الساقین مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ ایک سے ہو سکتے ہیں۔

6.4 مثلث کا بیرونی زاویہ اور اس کی خصوصیت

(Exterior Angle of a Triangle and its Property)

خود کریں



شکل 6.7

- 1- ΔABC بنائیے اور اس کے کسی ایک ضلع، مان لیجیے۔ BC کو تصویر 6.7 میں دکھائے گئے طریقے سے بڑھائیے۔
 نقطہ C پر بنے زاویہ ACD پر دھیان دیجیے۔ یہ زاویہ ΔABC کے بیرون میں واقع ہے۔ اس کو ہم ΔABC کے راس C پر بننے والا بیرونی زاویہ کہتے ہیں۔
 صاف ظاہر ہوتا ہے کہ $\angle ACD$ ، $\angle BCA$ کا متصل زاویہ ہے۔ مثلث کے باقی زاویوں کے نام $\angle A$ اور $\angle B$ ہیں اور ان زاویوں کو متقابل داخلی زاویے کہتے ہیں، یا $\angle ACD$ کے دو بیرونی داخلی زاویے کہلاتے ہیں۔ اب $\angle A$ اور $\angle B$ کو کاٹ لیجیے (یا ان کی نقل بنالیجیے) اور تصویر 6.8 میں دکھائے گئے طریقے سے ایک دوسرے سے ملا کر رکھیے۔

کیا یہ دونوں ٹکڑے $\angle ACD$ کو پوری طرح ڈھک پارہے ہیں؟ کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ

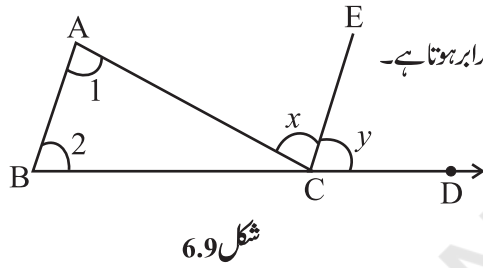
$$m \angle ACD = m \angle A + m \angle B?$$

2- جیسا کہ پہلے بھی کیا ہے، ایک مثلث ABC بنائیے اور ایک بیرونی زاویہ ACD بنائیے اب چاندہ کی مدد سے $\angle ACD$ ، $\angle A$ اور $\angle B$ کو ناپیے۔

شکل 6.8



$\angle A + \angle B$ کا جوڑ معلوم کیجیے اور اس کا موازنہ $\angle ACD$ سے کیجیے۔ کیا آپ نے مشاہدہ کیا کہ $\angle A + \angle B$ ، $\angle ACD$ کے برابر ہے (یا تقریباً برابر ہے۔ اگر ناپنے میں کوئی غلطی ہو گئی)؟ آپ کچھ اور مثلث اور ان کے بیرونی زاویے بنا کر یہ عمل دہرا بھی سکتے ہیں۔ ہر بار آپ پائیں گے کہ مثلث کا بیرونی زاویہ متقابل داخلی زاویوں کے جوڑ کے برابر ہے۔



قدم بہ قدم منطقی استدلال اس حقیقت کو مزید ثابت کر سکتا ہے۔ کسی ایک مثلث کا ایک بیرونی زاویہ اپنے متقابل داخلی زاویوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔ دیا گیا ہے: $\triangle ABC$ پر دھیان دیجیے۔ $\angle ACD$ ایک بیرونی زاویہ ہے۔ ثابت کرنا ہے: $m \angle ACD = m \angle A + m \angle B$ سے C کے متوازی $\overline{CE}$ بنائیے۔

وضاحت

و جہات $\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ اور $\overline{AC}$ ایک خط قاطع ہے۔ اس لیے متبادل

$$\angle 1 = \angle x(a)$$

زاویوں کو برابر ہونا چاہیے۔

$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ اور $\overline{BD}$ ایک خط قاطع ہے۔ اس لیے نظیری

$$\angle 2 = \angle y(b)$$

زاویوں کو برابر ہونا چاہیے۔

تصویر 6.9 ہے۔

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$$

$$\angle x + \angle y = m \angle ACD \text{ اب}$$

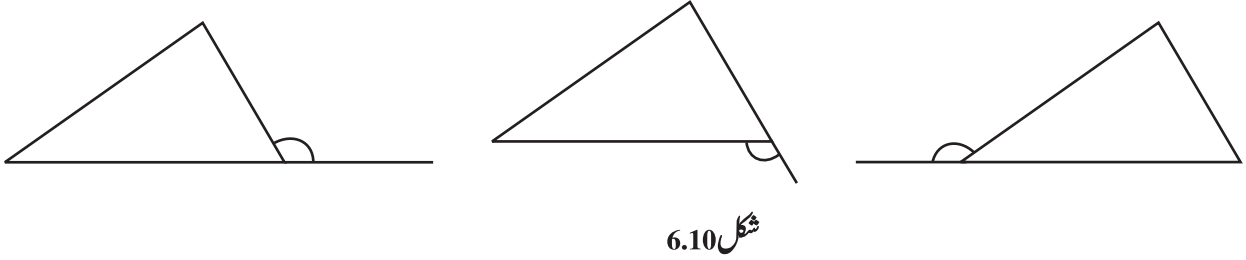
$$\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD \text{ لہذا}$$

مثلث کے بیرونی زاویے اور متقابل داخلی زاویوں کے اس تعلق کو مثلث کے بیرونی زاویے کی خصوصیت کہا جاتا ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1- کسی مثلث کے بیرونی زاویے مختلف طریقوں سے بنائیے جاسکتے ہیں۔ ان میں سے تین یہاں (تصویر 6.10) دکھائے جا رہے ہیں۔



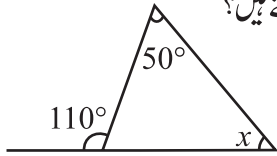


شکل 6.10

اس کے علاوہ، بیرونی زاویے بنانے کے تین اور بھی طریقے ہیں۔ ان کے رف اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے۔

2- کیا کسی مثلث کی ہر ایک راس پر بنائے گئے بیرونی زاویے برابر ہیں؟

3- آپ کسی مثلث کے بیرونی زاویہ اور اس کے متصل داخلی زاویہ کے جوڑ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟



شکل 6.11

مثال 1 تصویر 6.11 میں زاویہ x معلوم کیجیے۔

متقابل داخلی زاویوں کا جوڑ بیرونی زاویہ

$$50^\circ + x = 110^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

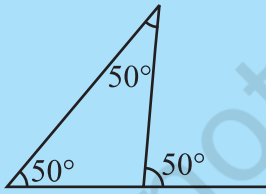


1- آپ متقابل داخلی زاویوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں اگر بیرونی زاویے ہوں:

(i) ایک زاویہ قائمہ؟ (ii) ایک زاویہ منفرجہ؟ (iii) ایک زاویہ حادہ؟

2- کیا کسی مثلث کا بیرونی زاویہ، زاویہ مستقیم ہو سکتا ہے؟

کوشش کیجیے:



شکل 6.12

1- کسی مثلث کے ایک بیرونی زاویے کی پیمائش 70° ہے اور متقابل داخلی زاویوں میں سے ایک

زاویے کی پیمائش 25° ہے۔ دوسرے متقابل داخلی زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے؟

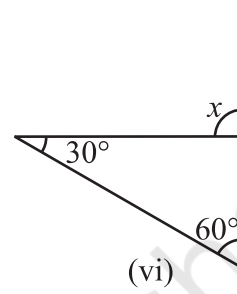
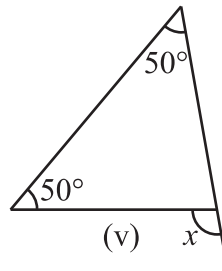
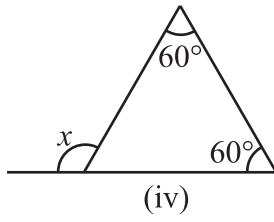
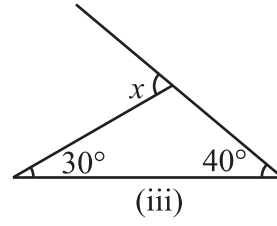
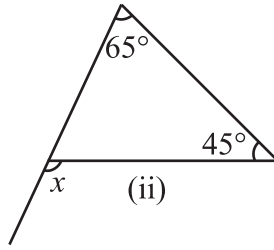
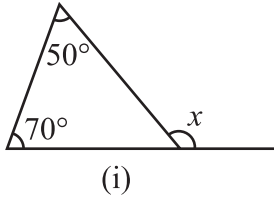
2- کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کے متقابل داخلی زاویے 60° اور 80° کے ہیں۔ بیرونی

زاویہ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

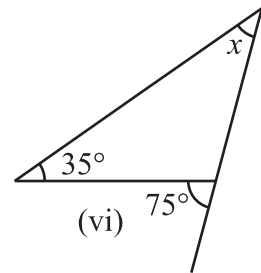
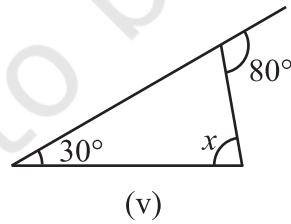
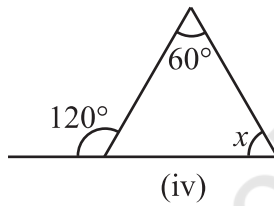
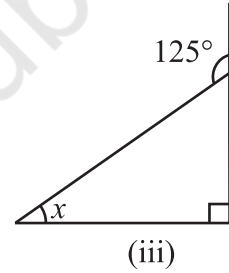
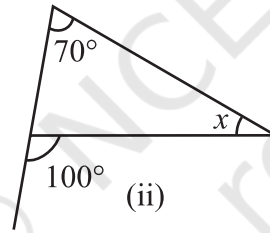
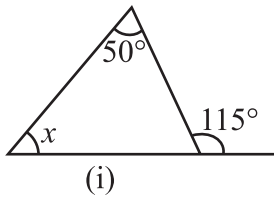
3- کیا اس ڈائیگرام (تصویر 6.12) میں کچھ غلط ہے؟

مشق 6.2

1- مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم بیرونی زاویہ x کی قیمت معلوم کیجیے۔



2- مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم متقابل داخلی زاویہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

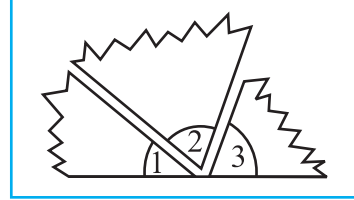
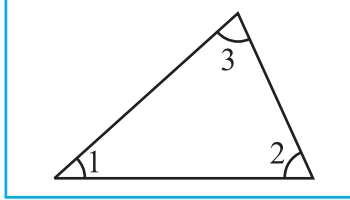


6.5 کسی مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت

(Angle Sum Property of a Triangle)

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے جوڑ سے متعلق یہ ایک بہت اہم خصوصیت ہے۔ مندرجہ ذیل چار سرگرمیوں کی مدد سے آپ اس خصوصیت کو سمجھ سکیں گے۔

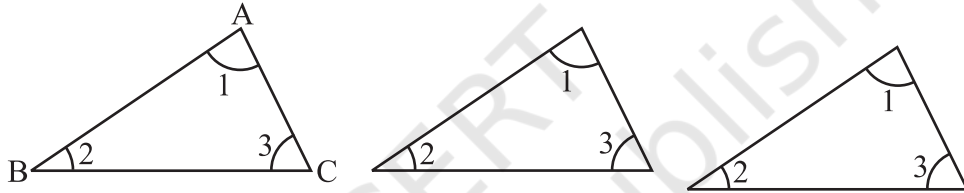
- 1- ایک مثلث بنائیے۔ اس کے تینوں زاویے کاٹ لیجیے۔ شکل (i), (ii) 6.13 میں دکھائے گئے طریقہ سے اس کو ترتیب دے دیجیے۔ ان تینوں زاویوں سے مل کر اب ایک زاویہ بن گیا ہے۔ یہ زاویہ مستقیم ہے اور اس کی پیمائش 180° ہے۔



شکل 6.13

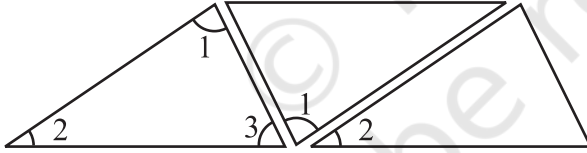
لہذا کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ 180° ہوتا ہے۔

- 2- اس حقیقت کو آپ مختلف طریقے سے دیکھ سکتے ہیں۔ کسی مثلث کی تین کا پیاں لیجیے، مان لیجیے $\triangle ABC$ کی (شکل 6.14)



شکل 6.14

تصویر 6.15 کی طرح اس کو ترتیب دیجیے۔ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ کے بارے میں آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ (کیا آپ نے بیرونی زاویے کی خصوصیت کو دیکھا؟)



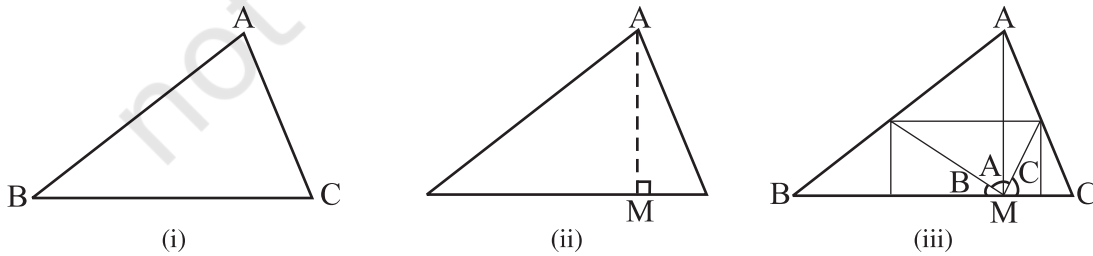
شکل 6.15

- 3- ایک کاغذ لیجیے اور ایک مثلث، مثلاً $\triangle ABC$ ، کاٹ لیجیے۔ (شکل 6.16)

$\triangle ABC$ کو موڑ کر ایک ایسا ارتفاع AM بنائیے

جو A سے گزرے۔

اب مثلث کے تینوں کونوں کو اس طرح موڑیے کہ تینوں راس A ، B اور C سے M کو چھوئیں۔



شکل 6.16

آپ پائیں گے کہ تینوں زاویے مل کر ایک زاویہ مستقیم بناتے ہیں۔ یہ پھر اسی بات کو ظاہر کرتا ہے کہ کسی مثلث کے تینوں

زاویوں کا جوڑ 180° کے برابر ہوتا ہے۔

4- کوئی تین مثلث $\triangle ABC$ ، $\triangle PQR$ اور $\triangle XYZ$ اپنی کاپی پر بنائیے۔

چاندے کی مدد سے ان مثلثوں کے تینوں زاویوں کی پیمائش کیجیے۔ اپنے نتائج کو جدول میں بھریے۔

مثلث کا نام	زاویوں کی پیمائش	تینوں زاویوں کی پیمائش کا جوڑ
$\triangle ABC$	$m\angle C = m\angle B = m\angle A =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
$\triangle PQR$	$m\angle R = m\angle Q = m\angle P =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
$\triangle XYZ$	$m\angle Z = m\angle Y = m\angle X =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

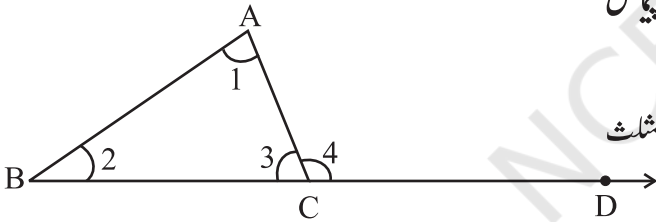
پیمائش میں تھوڑی بہت غلطی ممکن ہے، آپ دیکھیں گے آخری کالم میں ہمیشہ 180° (یا تقریباً 180°) آتا ہے۔

جب بالکل درست پیمائش ممکن ہوگی تو یہ دکھائے گا کہ تینوں زاویوں کی پیمائش کا جوڑ 180° کے برابر ہوتا ہے۔

اب آپ اس قابل ہو گئے ہیں کہ اپنے اس نتیجہ کو منطقی استدلال کی مدد سے ثابت کر سکیں۔

بیان: کس مثلث کے تینوں زاویوں کی کل پیمائش

180° کے برابر ہے۔



شکل 6.17

اس بیان کی صداقت کو ثابت کرنے کے لیے ہم مثلث

کے بیرونی زاویے کی خصوصیت کا استعمال کرتے ہیں۔

دیا گیا ہے $\triangle ABC$ کے زاویے $\angle 1$ ، $\angle 2$ اور $\angle 3$ ہیں

جب BC کو D تک بڑھایا گیا تو $\angle 4$ ، بیرونی زاویہ ہے۔

صداقت کی وضاحت $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (بیرونی زاویہ کی خصوصیت)

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3 \quad (\text{دونوں طرف } \angle 3 \text{ جوڑ دیا})$$

لیکن $\angle 4$ اور $\angle 3$ تو ایک خطی جوڑا بن رہے ہیں۔ جس کا جوڑا 180° کے برابر ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$

آئیے اب ہم دیکھتے ہیں ہم اس خصوصیت کا استعمال مختلف طرح سے کیسے کر سکتے ہیں۔

مثال 2 دی گئی شکل (تصویر 6.18) میں $m\angle P$ معلوم کیجیے۔

حل کسی مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت کی مدد سے

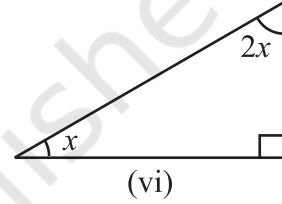
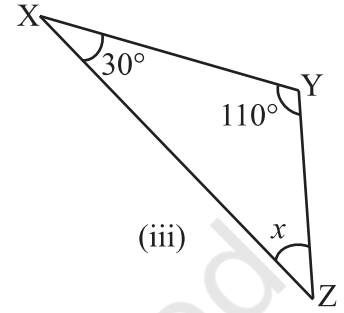
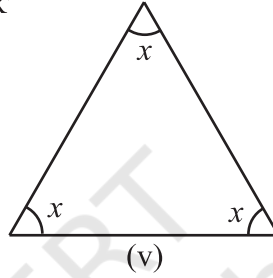
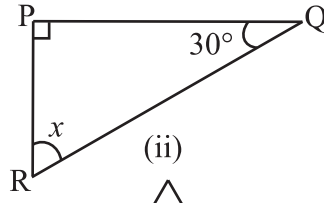
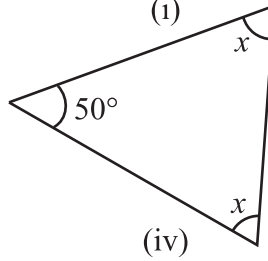
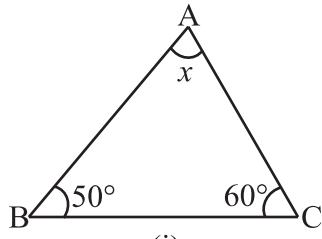
$$m\angle P + 47^\circ + 52^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle P = 180^\circ - 47^\circ - 52^\circ \text{ اس لیے}$$

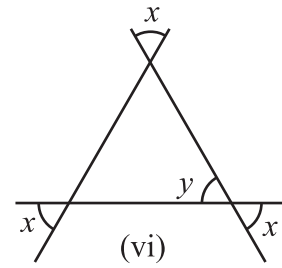
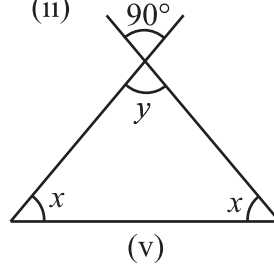
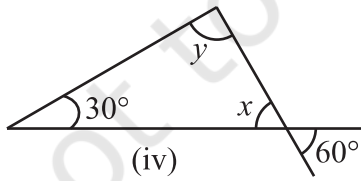
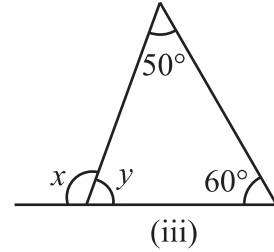
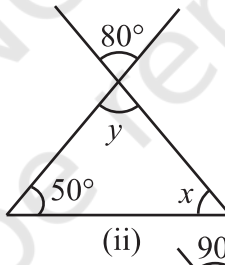
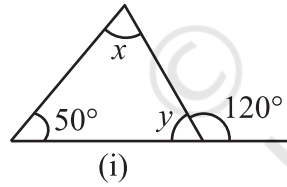


مشق 6.3

1- مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم x کی قیمت معلوم کیجیے۔



2- مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔



کوشش کیجیے:

1- کسی مثلث کے دو زاویے 30° اور 80° ہیں۔ تیسرا زاویہ معلوم کیجیے۔

2- کسی مثلث کا ایک زاویہ 80° کے برابر ہے اور باقی زاویے آپس میں برابر ہیں۔ برابر زاویوں میں سے ہر زاویے کی قیمت معلوم کیجیے۔

3- کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا تناسب 1:2:1 ہے مثلث کے تینوں زاویے معلوم کیجیے۔ مثلث کی درجہ بندی دو مختلف طریقوں سے کیجیے۔

سوچے بحث کیجیے اور لکھیے

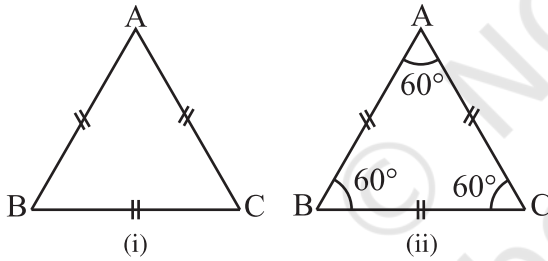


- 1- کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہو سکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ قائمہ ہوں؟
- 2- کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہو سکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ منفرجہ ہوں؟
- 3- کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہو سکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ حادہ ہوں؟
- 4- کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہو سکتا ہے جس کے تینوں زاویے 60° سے بڑے ہوں؟
- 5- کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہو سکتا ہے جس کے تینوں زاویے 60° کے برابر ہوں؟
- 6- کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہو سکتا ہے جس کے تینوں زاویے 60° سے کم ہوں؟

6.6 دو مخصوص مثلث: مساوی الاضلاع اور مساوی الساقین

(Two Special Triangles : Equilateral and Isosceles)

وہ مثلث جس کے تینوں اضلاع برابر ہوتے ہیں مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔



شکل 6.19

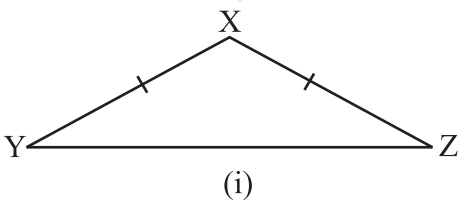
کسی مساوی الاضلاع مثلث ABC کی دو ہم شکل تصویریں لیجیے (شکل 6.19) ان میں سے ایک کو ایک جگہ چپکا دیجیے اور دوسری کو اس کے اوپر رکھ دیجیے۔ یہ پوری طرح سے پہلے مثلث کو ڈھک لے گی۔ اس کو کسی بھی طرح سے گھمائیے یہ پھر ایک دوسری کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔ آپ نے یہ دیکھا کہ جب تینوں اضلاع برابر ہوتے ہیں تو تینوں زاویوں کی پیمائش بھی ایک سی ہوتی ہے؟

ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ مساوی الاضلاع مثلث میں؛

(i) تمام اضلاع کی لمبائی برابر ہے۔

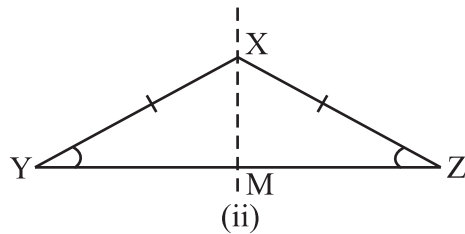
(ii) ہر زاویہ کی پیمائش 60° ہے۔

ایسا مثلث جس کے دو اضلاع برابر ہوتے ہیں مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے۔



(i)

شکل 6.20



(ii)

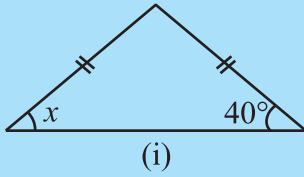
کاغذ کا ایک مساوی الساقین مثلث XYZ کاٹے جس کی $XY = XZ$ ہو۔ (شکل 6.20) اس کو اس طرح موڑیے کہ Y, Z پر آجائے۔ X سے گزرنے والا خط XM اب خط تشاکل ہے۔ (جس کے بارے میں آپ باب 14 میں پڑھیں گے۔) آپ دیکھیں کہ $\angle Y$ اور $\angle Z$ ایک دوسرے کے اوپر پوری طرح سے فٹ آتے ہیں۔ XY اور XZ مساوی اضلاع کہلاتے ہیں۔ YZ قاعدہ کہلاتا ہے۔ $\angle Y$ اور $\angle Z$ کو قاعدہ پر بنے زاویے کہتے ہیں یہ آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

لہذا، ایک مساوی الساقین مثلث میں:

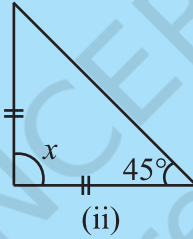
- (i) دو اضلاع کی لمبائی آپس میں برابر ہوتی ہے۔
- (ii) برابر لمبائی والے اضلاع کے متقابل زاویے، جو کہ قاعدہ پر بنے ہوتے ہیں، بھی آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

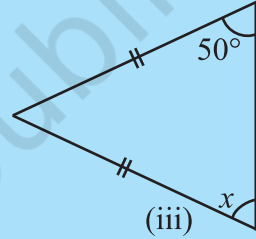
1- ہر شکل میں زاویہ x معلوم کیجیے۔



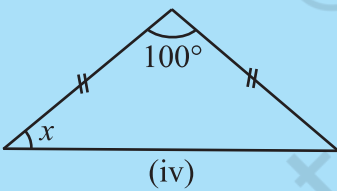
(i)



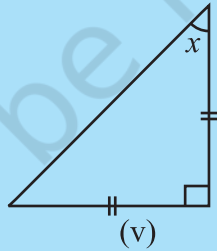
(ii)



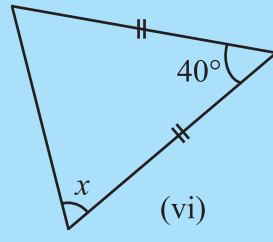
(iii)



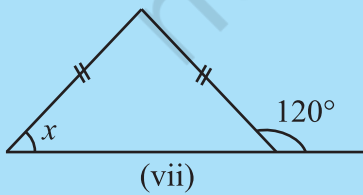
(iv)



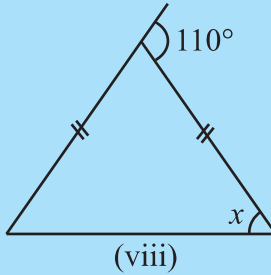
(v)



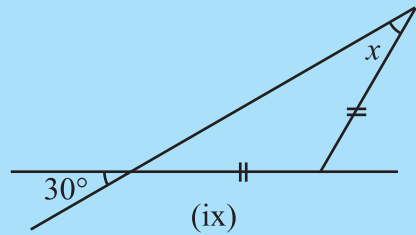
(vi)



(vii)

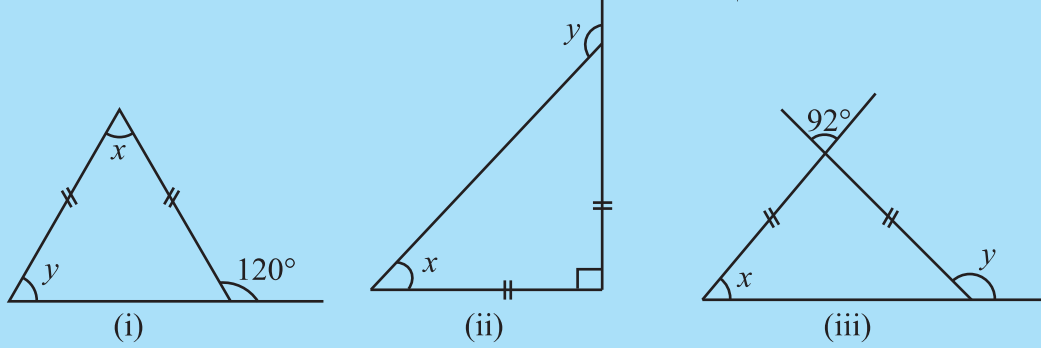


(viii)



(ix)

2- ہر شکل میں زاویے x اور y معلوم کیجیے۔

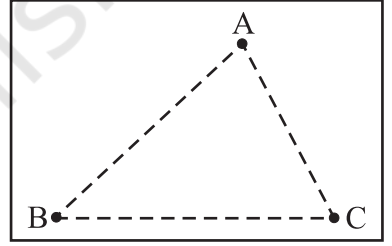


6.7 کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ

(Sum of the Lengths of Two Sides of a Triangle)

1- اپنے کھیل کے میدان میں تین غیر ہم خط نشانہ A، B اور C لگائیے۔ چونے کی مدد سے راستوں AB، BC اور AC پر نشان لگائیے۔

اپنی دوست سے کہیے کہ وہ A سے شروع کر کے، ایک یا زیادہ راستوں سے گزر کر C پر پہنچے۔ مثال کے طور پر وہ پہلے $\overline{AB}$ سے اور پھر $\overline{BC}$ سے ہو کر C پر پہنچے۔ یا وہ سیدھی $\overline{AC}$ کے ذریعے بھی C پر پہنچ سکتی ہے۔ یقیناً وہ AC والا سیدھا راستہ ہی اپنائے گی۔ اگر وہ دوسرا راستہ اپناتی ہے۔ (پہلے $\overline{AB}$ پر $\overline{BC}$) تو اس کو زیادہ چلنا پڑتا ہے۔



شکل 6.21

دوسرے الفاظ میں

$$AB + BC > AC$$

اس طرح، اگر کسی کو B سے شروع کر کے A پر پہنچنا ہے تو وہ $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ والا راستہ نہ اپنا کر $\overline{BA}$ والا راستہ چننا زیادہ پسند کرے گی/گا۔ کیونکہ

$$BC + CA > AB$$

بالکل اسی وجہ سے، آپ معلوم کر سکتے ہیں

$$CA + AB > BC$$

ان مشاہدات سے پتہ چلتا ہے کہ کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کا جوڑ تیسرے ضلع کی پیمائش سے زیادہ ہوتا ہے۔

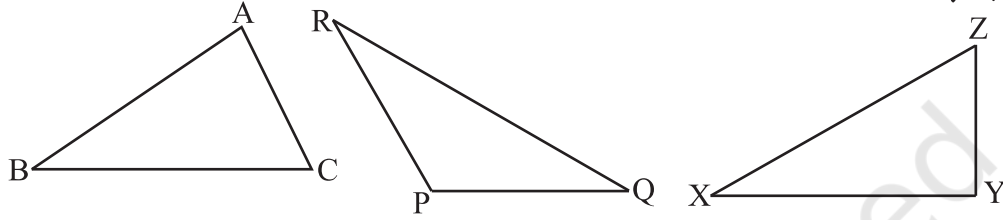
2- مختلف پیمائشوں کی 15 چھوٹی لکڑیاں جمع کیجیے (یا پیٹیاں) جیسے، 7 سینٹی میٹر، 8 سینٹی میٹر، 9 سینٹی میٹر، 20 سینٹی میٹر۔ ان میں سے کوئی بھی تین لکڑیاں لیجیے اور ان سے ایک مثلث بنانے کی کوشش کیجیے۔ تین تین لکڑیوں کے مختلف مجموعے لے کر اس سرگرمی کو دہرائیے۔

مان لیجیے پہلے آپ نے 6 سم اور 12 سم لمبی دو لکڑیاں لیں تو آپ کی تیسری لکڑی کی لمبائی 6-12 سم سے ہر حال میں زیادہ

اور $12+6=18$ سم سے کم ہونی چاہیے۔ اس کو کروکھیے اور بتائیے کہ ایسا کیوں ہے۔
ایک مثلث بنانے کے لیے آپ کو تین ایسی لکڑیوں کی ضرورت ہوگی جن میں سے کوئی بھی دو کی لمبائیوں کا جوڑ تیسری لکڑی کی لمبائی سے زیادہ ہوگا۔

اس سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ ایک مثلث کے دو اضلاع کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

3۔ اپنی کاپی میں کوئی بھی تین مثلث بنائیے جیسے $\triangle ABC$ ، $\triangle PQR$ اور $\triangle XYZ$ (شکل 6.22)



شکل 6.22

پھر اپنے نتائج کو جدول میں دیے گئے طریقے سے بھر دیجیے۔

Δ کا نام	اضلاع کی لمبائیاں	کیا یہ صحیح ہے	
Δ ABC	AB ____	$AB - BC < CA$	ہاں / نہیں
	BC ____	$BC - CA < AB$	ہاں / نہیں
	CA ____	$CA - AB < BC$	ہاں / نہیں
PQR	PQ ____	$PQ - QR < RP$	ہاں / نہیں
	QR ____	$QR - RP < PQ$	ہاں / نہیں
	RP ____	$RP - PQ < QR$	ہاں / نہیں
Δ XYZ	XY ____	$XY - YZ < ZX$	ہاں / نہیں
	YZ ____	$YZ - ZX < XY$	ہاں / نہیں
	ZX ____	$ZX - XY < YZ$	ہاں / نہیں

اس سے ہمارے پہلے لگائے گئے اندازے کو تقویت ملتی ہے۔ اس لیے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ، ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائی کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

ہم نے یہ بھی دیکھا ہے کہ ایک مثلث کے کوئی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔

مثال 3 کیا کوئی مثلث ایسا ہو سکتا ہے جس کے اضلاع کی لمبائیاں 10.2 سینٹی میٹر، 5.8 سینٹی میٹر، اور 4.5 سینٹی میٹر ہوں؟

حل مان لیجیے ایک مثلث ممکن ہے۔ تو کوئی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا۔ آئیے اس کی جانچ کریں۔

$$\text{کیا } 4.5 + 5.8 > 10.2? \text{ ہاں}$$

$$\text{کیا } 5.8 + 10.2 > 4.5? \text{ ہاں}$$

$$\text{کیا } 10.2 + 4.5 > 5.8? \text{ ہاں}$$

اس لیے یہ مثلث ممکن ہے۔

مثال 4 ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سینٹی میٹر ہیں۔ تیسرے ضلع کی لمبائی کن دو اعداد کے درمیان ہو سکتی ہے؟

حل ہم جانتے ہیں مثلث کے دو اضلاع کا لمبائیوں کی جوڑ ہمیشہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔
اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی دونوں ضلوں کی لمبائیوں کے جوڑ سے کم ہونی چاہئے۔ یعنی $14 = 8 + 6$ سینٹی میٹر سے کم۔ تیسرے ضلع کی لمبائی اضلاع کی لمبائیوں کے فرق سے کم نہیں ہونی چاہیے۔ اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی $8 - 6 = 2$ سینٹی میٹر سے زیادہ ہوتی۔
اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی 14 سینٹی میٹر سے کم اور 2 سینٹی میٹر سے زیادہ ہوگی۔

مشق 6.4

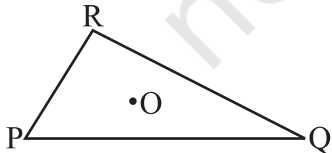
1- کیا یہ ممکن ہے کہ کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہوں۔

(i) 2 cm, 3 cm, 5 cm

(ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm

(iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm

2- کوئی نقطہ O مثلث PQR کے اندرون میں لیجیے۔ کیا



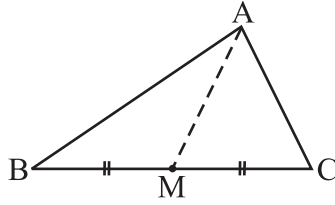
(i) $OP + OQ > PQ?$

(ii) $OQ + OR > QR?$

(iii) $OR + OP > RP?$

3- AM مثلث ABC کا وسطانیہ ہے۔

کیا $AB + BC + CA > 2 AM?$



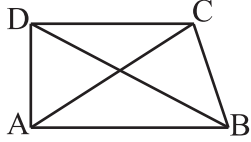
(مثلث کے $\triangle ABM$ اور $\triangle AMC$ کے اضلاع کو دیکھیے۔)

4- ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ کیا

AB + BC + CD + DA > AC + BD؟

5- ABCD ایک چار ضلعی ہے۔ کیا

AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)؟



6- مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 12 سم اور 15 سم ہیں۔ تیسرے ضلع کی لمبائی کن دو

پیمائشوں کے درمیان ہونی چاہیے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

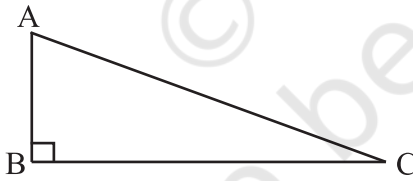


1- کیا کسی مثلث کے دو زاویوں کا جوڑ ہمیشہ تیسرے زاویہ سے بڑا ہوتا ہے؟

6.8 زاویہ قائمہ مثلث اور فیثاغورث کا مسئلہ

(Right-angled Triangles and Pythagoras Property)

اس حصہ میں زاویہ قائمہ مثلث کی ایک بہت اہم اور کارآمد خصوصیت دی گئی ہے۔ جس کا پتہ یونانی فلسفی فیثاغورث نے چھٹی صدی ق۔ م۔ نے لگایا تھا۔ لہذا اس خصوصیت کا نام انہیں کے نام پر رکھا گیا ہے۔ درحقیقت اس خصوصیت کے بارے میں دوسرے ممالک کے لوگ بھی جانتے تھے۔ ہندوستانی ریاضی دیاں بودھان نے بھی اس خصوصیت کی معادل شکل پیش کی تھی۔ اب ہم فیثاغورث کی اس خصوصیت کی وضاحت کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

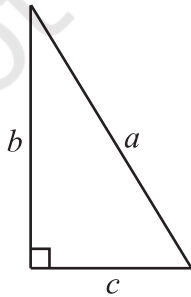


شکل 6.23

زاویہ قائمہ مثلث میں اضلاع کے کچھ مخصوص نام ہوتے ہیں۔ وہ ضلع جو زاویہ قائمہ کے متقابل ہوتا ہے وتر کہلاتا ہے؛ باقی دو اضلاع زاویہ قائمہ مثلث کے بازو کہلاتے ہیں۔

$\triangle ABC$ میں (تصویر 6.23) زاویہ قائمہ B پر ہے، اس لیے AC اس کا وتر ہے۔ $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے دو بازو ہیں۔

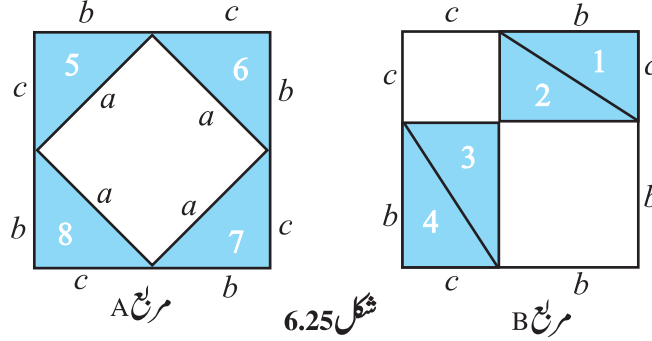
زاویہ قائمہ مثلث کے کسی بھی پیمائش کی آٹھ معادل اشکال بنا لیجیے۔ مثال کے طور پر آپ ایک قائمہ زاویہ مثلث بنائیے جس کا وتر a اکائی لمبائی ہو۔ اور باقی دونوں بازوؤں کی لمبائیاں b اکائی اور c اکائی ہو۔ (تصویر 6.24)



شکل 6.24

ایک کاغذ پر دو معادل مربع بنائیے جن کے اضلاع b+c لمبائی کے ہوں۔ آپ کو ایک مربع میں چار مثلث رکھنے ہیں اور باقی کے چار مثلث

دوسرے مربع میں رکھنے ہیں جیسا کہ ڈائگرام میں دکھایا گیا ہے (شکل 6.25)۔



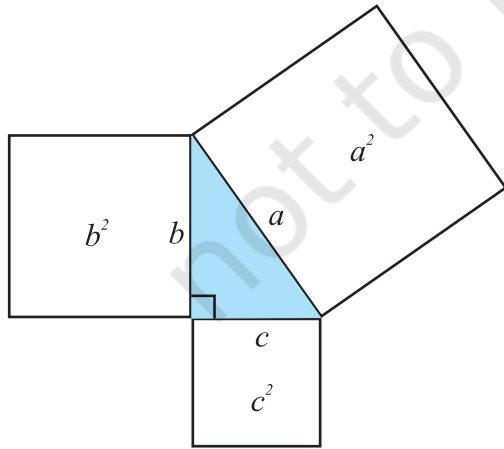
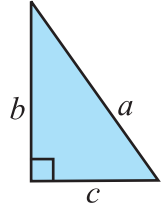
شکل 6.25

مربعے معادل ہیں اور آٹھ مثلث بھی معادل ہیں۔ لہذا مربع A کا خالی حصہ = مربع B کا خالی حصہ
یعنی مربع A کے اندرونی مربع کا رقبہ = مربع B کے اندر خالی جگہ پر بننے والے دونوں مربعوں کا کل رقبہ
$$a^2 = b^2 + c^2$$

یہ فیثاغورث کا مسئلہ ہے۔ اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

ایک قائمہ زاویہ مثلث میں
وتر کا مربع = دونوں بازوؤں کے مربعوں کا جوڑ

ریاضی میں فیثاغورث کی خصوصیت بہت کارآمد آلہ کی طرح ہے۔ بعد میں آنے والی جماعتوں میں اس کو ایک مسئلہ کی طرح ثابت کیا جائے گا۔ آپ کو اس کا مطلب اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے۔
اس میں کہا گیا ہے کہ کسی زاویہ قائمہ مثلث میں وتر پر بننے والا مربع کا رقبہ، اس کے بازو پر بننے والے مربعوں کے رقبوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

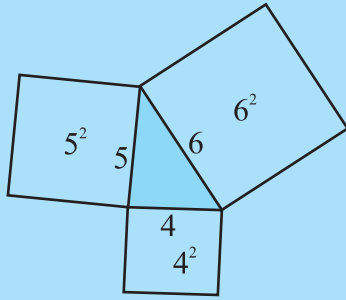


شکل 6.26

ایک زاویہ قائمہ مثلث بنائیے، اگر ایک گراف پیپر پر بنائیں تو زیادہ اچھا ہے۔ اس کے اضلاع پر الگ الگ مربع بنائیے۔ ان مربعوں کا رقبہ نکالیں اور اس مسئلہ کو عملی طور جانچیں۔ (شکل 6.26) اگر آپ کے پاس ایک زاویہ قائمہ مثلث ہے تو فیثاغورث کی خصوصیت اس پر لاگو ہوگی۔ اور اگر فیثاغورث کی خصوصیت کسی مثلث پر لاگو ہو رہی ہے تو کیا وہ مثلث زاویہ قائمہ مثلث ہوگا؟ (اس طرح کے مسئلہ کو معکوس مسئلہ کہتے ہیں)۔ ہم اس کا جواب دینے کی کوشش کریں گے۔ اب ہم دکھائیں گے کہ اگر ایک مثلث ایسا ہے اس کے دو اضلاع پر بنے مربعوں کے رقبوں کا جوڑ تیسرے

ضلع پر بنے مربع کے رقبے کے برابر ہو، تو یہ مثلث لازمی طور پر زاویہ قائمہ مثلث ہوگا۔

کوش کیجیے:



شکل 6.27

1- تین ایسے مربعے کاٹے جن کے اضلاع بالترتیب 4 سم، 5 سم اور 6 سم لمبے ہوں۔ (شکل 6.27) میں دکھائے گئے طریقے سے ان مربعوں کی ترتیب اس طرح دیجیے کہ ان سے ایک مثلث نما شکل بن کر سامنے آئے۔ اس طرح بنے مثلث کی نقل اتار لیجیے۔ مثلث کے ہر زاویہ کی پیمائش کیجیے۔ آپ پائیں گے کہ ان میں سے کوئی زاویہ قائمہ نہیں ہے۔

دراصل اس صورت حال میں ہر زاویہ حادثہ ہے۔ نوٹ کیجیے کہ

$$6^2 + 4^2 \neq 5^2 \text{ اور } 4^2 + 5^2 \neq 6^2, 5^2 + 6^2 \neq 4^2$$

2- اس سرگرمی کو 4 سم، 5 سم اور 7 سم کی لمبائوں کے ساتھ دہرائیے۔ آپ کو ایک منفرد زاویہ مثلث ملے گا۔ نوٹ کیجیے۔

$$4^2 + 5^2 \neq 7^2$$

اس سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ فیثاغورث کی خصوصیت صرف اور صرف اسی وقت لاگو ہوتی ہے جب مثلث ایک زاویہ قائمہ مثلث ہو۔ لہذا ہم کو یہ حقیقت ملتی ہے:

اگر فیثاغورث کی خصوصیت لاگو ہوتی ہے تو مثلث ضروری طور پر قائمہ زاویہ مثلث ہوگا۔

مثال 5 معلوم کیجیے کہ کیا ایک ایسا مثلث جس کی اضلاع کی لمبائیاں 3 سم، 4 سم، اور 5 سم ہوں توہ ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

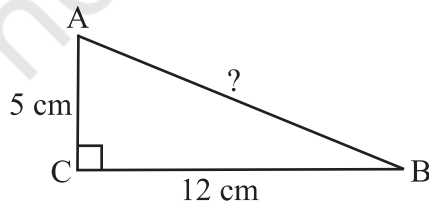
حل $3^2 = 3 \times 3 = 9; 4^2 = 4 \times 4 = 16; 5^2 = 5 \times 5 = 25$

ہم نے دیکھا کہ $3^2 + 4^2 = 5^2$

اس لیے مثلث، قائمہ زاویہ ہے۔

نوٹ: ہر قائمہ زاویہ مثلث میں وتر ہمیشہ سب سے لمبا ضلع ہوتا ہے اس مثال

میں وہ ضلع جس کی لمبائی 5 سم ہے وہ وتر ہے۔



شکل 6.28

مثال 6 $\triangle ABC$ ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے جس کا زاویہ قائمہ C پر ہے۔

اگر $AC = 5$ سم $BC = 12$ سم ہے۔ تو AB کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل ایک رف شکل ہماری مدد کرے گی (شکل 6.28)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

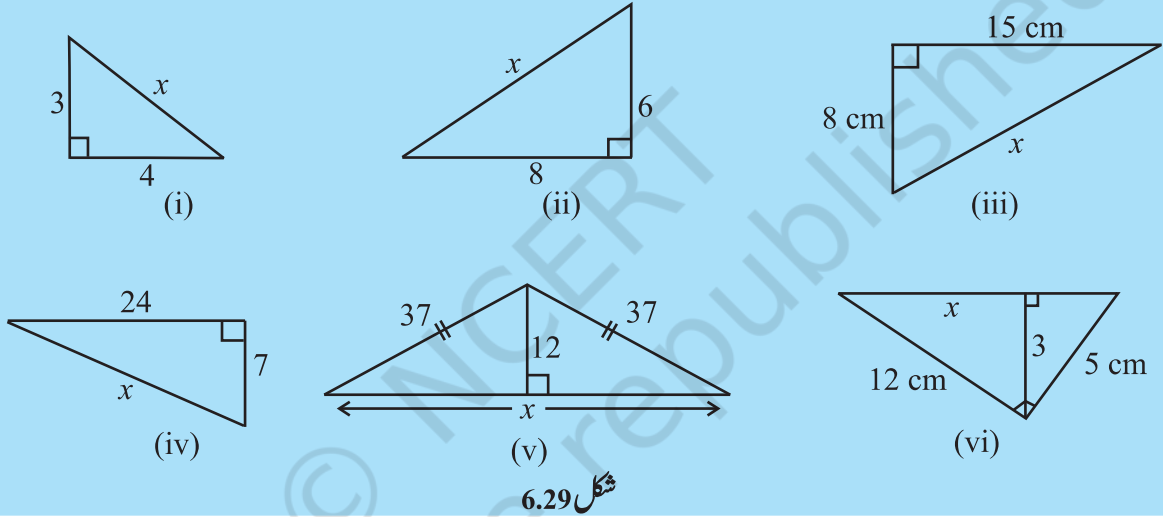
$$AB^2 = 13^2$$

اس لیے $AB = 13$ یا AB کی لمبائی 13 سم ہے۔

نوٹ: مکمل مربع معلوم کرنے کے لیے آپ ابتدائی تقسیم اجزاء کی تکنیک اپنا سکتے ہیں۔

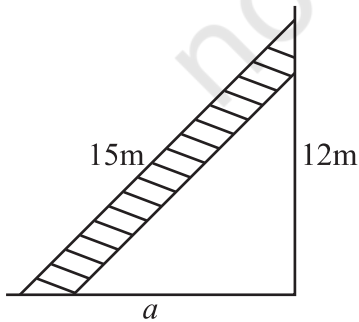
کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم لمبائی x معلوم کیجیے۔



شکل 6.29

مشق 6.5



- 1- PQR ایک مثلث ہے جس میں P پر زاویہ قائمہ بن رہا ہے۔
اگر $PQ = 10\text{ cm}$ اور $PR = 24\text{ cm}$ ہے تو QR معلوم کیجیے۔
- 2- ABC ایک مثلث ہے جس میں C پر زاویہ قائمہ بن رہا ہے۔
اگر $AB = 25$ سم اور $AC = 7\text{ cm}$ ہو تو BC معلوم کیجیے۔
- 3- ایک میٹر لمبی سیڑھی، 12 میٹر اونچی کھڑکی پر دیوار کے سہارے لگائی گئی ہے۔ زمین پر سیڑھی کا دیوار سے فاصلہ a ہے۔ سیڑھی کے نچلے حصے کا دیوار سے فاصلہ بتائیے۔
- 4- درج ذیل میں سے کون سے قائمہ زاویہ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں؟



$$(i) \quad 2.5 \text{ سم، } 6.5 \text{ سم، } 6 \text{ سم}$$

$$(ii) \quad 2 \text{ سم، } 2 \text{ سم، } 5 \text{ سم}$$

$$(iii) \quad 1.5 \text{ سم، } 2 \text{ سم، } 2.5 \text{ سم}$$

قائمہ زاوی مثلث کے کیس میں زاویہ قائمہ معلوم کیجیے۔

5- ایک پیڑ زمین سے 5 میٹر کی اونچائی سے ٹوٹے گیا اور اس کا اوپری سر زمین کو

پیڑ کی جڑ سے 12 میٹر کی دوری پر چھو رہا ہے۔ پیڑ کی اصلی اونچائی بتائیے۔

6- ΔPQR کے Q اور R زاویے بالترتیب 25° اور 65° کے ہیں۔ لکھیے مندرجہ

ذیل میں سے کون سے درست ہیں :

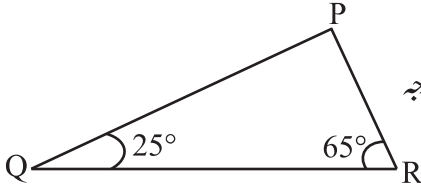
$$(i) \quad PQ^2 + QR^2 = RP^2$$

$$(ii) \quad PQ^2 + RP^2 = QR^2$$

$$(iii) \quad RP^2 + QR^2 = PQ^2$$

7- اس مستطیل کا احاطہ بتائیے جس کی لمبائی 40 سم اور وتر 41 سم ہے۔

8- ایک معین کے وتروں کی پیمائش 16 سم اور 30 سم ہے اس کا احاطہ بتائیے۔



سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1- مثلث PQR کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے جس کا زاویہ قائمہ P پر ہے؟

2- مثلث ABC کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے جس کا زاویہ قائمہ B پر ہے؟

3- ایک قائمہ زاوی کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے؟

4- کسی مستطیل کے وتر کے ذریعے حاصل ہوا رقبہ وہی ہوگا جو رقبہ اس کی لمبائی اور چوڑائی کے ذریعے حاصل ہوگا۔ یہ بودھیان کا مسئلہ

ہے۔ اس کا موازنہ فیثاغورث کی خصوصیت سے کیجیے۔

خود کریں

متمول سرگرمی

قطع و برید اور ترتیب نو کے ذریعے فیثاغورث کے مسئلہ کے بہت سارے ثبوت دیے گئے ہیں۔ ان میں سے کچھ کو جمع کیجیے اور ان کی وضاحت کے لیے چارٹ بنائیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1- کسی مثلث کے 6 حصے (elements) ہوتے ہیں۔ 3 اضلاع اور 3 زاویے۔

2- کسی مثلث کے ایک راس کو اس کے متقابل ضلع کے درمیان وسطی نقطے سے ملانے والے قطعہ خط کو مثلث کا وسطانیہ کہتے ہیں۔

ایک مثلث کے تین وسطانیے ہوتے ہیں۔

- 3- کسی مثلث کے ایک راس سے اس کے متقابل ضلع پر کھینچا جانے والا عمودی خط ارتفاع کہلاتا ہے۔ ایک مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔
- 4- جب ایک مثلث کے کسی ایک ضلع کو بڑھایا جاتا ہے۔ تو بیرونی زاویہ بنتا ہے۔ ہر ایک راس پر بیرونی زاویے بنانے کے دو طریقے ہیں۔
- 5- بیرونی زاویوں کی ایک خصوصیت:
- کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کی پیمائش اس کے دونوں متقابل داخلی زاویوں کی پیمائش کے جوڑ کے برابر ہوتی ہے۔
- 6- مثلث کے زاویوں کے جوڑ والی خصوصیت۔ مثلث کے تینوں زاویوں کی کل پیمائش 180° کے برابر ہوتی ہے۔
- 7- ایک مثلث مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے اگر اس کے ہر ضلع کی لمبائی ایک ہی ہے۔ مساوی الاضلاع مثلث کے ہر ایک زاویہ کی پیمائش 60° ہوتی ہے۔
- 8- ایک مثلث مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے، اگر اس کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائی برابر ہو۔
- مساوی الساقین مثلث کی غیر برابر ضلع کو اس کا قاعدہ کہتے ہیں۔ ایک مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر بنے دونوں زاویوں کی پیمائش آپس میں برابر ہوتی ہے۔
- 9- مثلث کے اضلاع کی لمبائی کی خصوصیت:
- ایک مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔
- مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔
- اس خصوصیت کا استعمال یہ جاننے کے لیے کیا جاتا ہے کہ اگر تین اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہیں تو کیا ان اضلاع کی مدد سے مثلث بن سکتا ہے یا نہیں۔
- 10- زاویہ قائمہ مثلث کے زاویہ قائمہ کے متقابل ضلع کو وتر کہتے ہیں اور باقی دو ضلعوں کو بازو کہتے ہیں۔
- 11- فیثاغورث کی خصوصیت:
- قائمہ زاوی مثلث میں
- وتر پر بنا مربع = دونوں بازو پر بنے مربعوں کا جوڑ
- اگر مثلث قائمہ زاوی مثلث نہیں ہے تو یہ خصوصیت لاگو نہیں ہوتی۔ اس خصوصیت کا استعمال یہ طے کرنے کے لیے بھی کیا جاسکتا ہے کہ دیا گیا مثلث قائمہ زاوی مثلث ہے یا نہیں۔

