باب 3

اعداد و شمار کا استعمال

3.1 تعارف (Introduction)

اپنی گزشتہ کلاسوں میں آپ نے مختلف طرح کے اعداد و شمار کے بارے میں پڑھا ہے۔ آپ نے اعداد و شمار کو اکٹھا کرنا، اس کا جدول بنانا اور پھر اس کا بار گراف بنانا سیکھا ہے۔ اعداد و شمار کو اکٹھا کرنا، اس کا تحریری اندراج کرنا اور پھر اس کا مختلف طریقوں سے اظہار کرنے سے ہمیں اپنے تجربات کی تنظیم کرنے اور اس کی مدد سے نتائج اخذ کرنے میں مدد ملتی ہے۔ اس باب میں ہم اسی تجربہ کو آگے بڑھائیں گے۔ آپ کچھ اور قسم کے اعداد و شمار اور گراف دیکھیں گے۔ آپ اکثر اخبار، رسالوں، ٹیلی ویژن وغیرہ میں مختلف قسم کے اعداد و شمار دیکھتے ہوں گے۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ ہر قسم کے اعداد و شمار ہمیں کچھ نہ کچھ معلومات فراہم کرتے ہیں۔ آیئے ذرا اعداد و شمار کی کچھ عام قسموں پر نظر ڈالتے ہیں جو آپ نے اکثر دیکھے ہوں گے۔

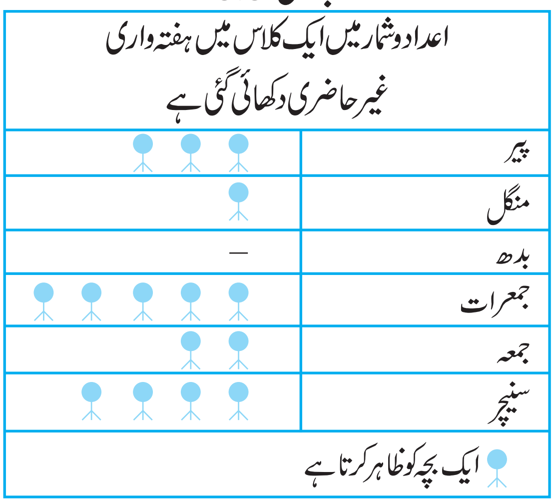
جدول 3.1

20.6.2006 کو مختلف شہروں کا درجۂ حرارت		
شہر	زیادہ سے زیادہ	کم سے کم
احمد آباد	38°C	29°C
امرتسر	37°C	26°C
بنگلور	28°C	21°C
چنئی	36°C	27°C
دہلی	38°C	28°C
جے پور	39°C	29°C
جموں	41°C	26°C
ممبئی	32°C	27°C

جدول 3.2

فٹ بال ورلڈ کپ 2006	
یوکرین نے سعودی عرب کو ہرایا	4 – 0
اسپین نے تیونیشیا کو ہرایا	3 – 1
سوئٹزرلینڈ نے ٹوگو کو ہرایا	2 – 0

جدول 3.3



© NCERT not to be republished

اعداد وشمار کے یہ مجموعے آپ کو کیا بتا رہے ہیں؟

مثال کے طور پر آپ کہہ سکتے ہیں کہ جموں میں 20.06.2006 کو سب سے زیادہ درجۂ حرارت تھا۔ (جدول 3.1) یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ بدھ کے دن ایک بھی بچہ غیر حاضر نہیں تھا۔ (جدول 3.3)

کیا ہم ان اعداد وشمار کو کسی مختلف طریقے سے منظّم اور ظاہر کر سکتے ہیں تا کہ ان کے تجزیے اور ان کی تشریح اور زیادہ بہتر طریقے سے کی جا سکے؟ اس طرح کے کچھ سوالات کو ہم اب اس باب میں دیکھیں گے۔

3.2 اعداد وشمار کو جمع کرنا (Collecting Data)

مختلف شہروں کے درجۂ حرارت کا اعداد وشمار (جدول 3.1) ہم کو بہت ساری چیزیں بتا تا ہے، لیکن یہ ہمیں نہیں بتا سکتا کہ کون سے شہر کا اس سال کے دوران درجۂ حرارت سب سے زیادہ تھا۔ یہ معلوم کرنے کے لیے ہم کو سال کے دوران ان شہروں کا درجۂ حرارت زیادہ سے زیادہ کہاں تک پہنچا، اس کے اعداد وشمار جمع کرنے کی ضرورت ہے۔ ایسی حالت میں سال کے کسی ایک خاص دن کے درج حرارت کا چارٹ، جیسا کہ جدول 3.1 میں دیا گیا ہے، کافی نہیں ہے۔

اس سے یہ بات ظاہر ہوتی ہے کہ کسی اعداد وشمار کا دیا گیا مجموعہ اس اعداد وشمار سے متعلق کوئی مخصوص جانکاری نہیں دیتا ہے۔ اس کے لیے ضرورت اس بات کی ہے کہ اعداد وشمار جمع کرتے وقت وہ مخصوص جانکاری دماغ میں رکھی جائے۔ اوپر والے کیس میں جو مخصوص جانکاری ہمیں چاہیے وہ سال کے دوران شہروں کا زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت ہے، جو کہ ہم کو جدول 3.1 سے نہیں مل سکتا ہے۔

لہٰذا، اعداد وشمار جمع کرنے سے پہلے یہ جان لینا ضروری ہے کہ ہم اس کو کس لیے استعمال کریں گے۔

نیچے کچھ حالتیں دی گئی ہیں

آپ پڑھنا چاہتے ہیں

- آپ کی کلاس کی ریاضی میں کارکردگی
- فٹ بال یا کرکٹ میں ہندوستان کی کارکردگی
- کسی دیے ہوئے علاقہ میں عورتوں کی تعلیم کی شرح
- آپ کے آس پڑوس میں رہنے والے کنبوں میں پانچ سال سے کم والے بچوں کی تعداد

اوپر دی گئی حالتوں میں آپ کو کس قسم کے اعداد وشمار کی ضرورت ہوگی؟ جب تک آپ مناسب اعداد وشمار اکٹھا نہیں کریں گے اس وقت تک آپ مطلوبہ جانکاری حاصل نہیں کر پائیں گے۔ ہر ایک کے لیے مناسب اعداد وشمار کیا ہے؟

اپنے دوستوں سے بات چیت کیجیے اور ہر ایک کے لیے ضروری اعداد وشمار کی شناخت کیجیے۔ ان میں سے کچھ اعداد وشمار جمع کرنے میں آسان ہیں اور کچھ مشکل۔

3.3 اعداد وشمار کی تنظیم کاری (Organisation of Data)

جب ہم اعداد وشمار جمع کرتے ہیں تو ہم اس کو درج (ریکارڈ) اور منظّم (Organise) کرتے ہیں۔ یہ کرنے کی ہمیں کیا ضرورت ہے؟

© NCERT not to be republished

درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے:

کلاس کی استانی (ٹیچر)، نیلم صاحبہ یہ جاننا چاہتی ہیں کہ بچوں کی انگریزی میں کارکردگی کیسی ہے۔ انہوں نے بچوں کے مارکس درج ذیل طریقہ سے لکھے۔

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

اس شکل میں یہ اعداد و شمار سمجھنا آسان نہیں ہے۔ وہ یہ بھی نہیں جانتیں کہ ان کا طلبا کے بارے میں جو تاثر ہے وہ ان کی کارکردگی سے بھی میل کھا رہا ہے یا نہیں۔

نیلم کی ساتھی ٹیچر نے اس اعداد و شمار کو درج ذیل طریقے سے منظم کرنے میں اس کی مدد کی۔ (جدول 3.4)

جدول 3.4

رول نمبر	نام	نمبر 50 میں سے	رول نمبر	نام	نمبر 50 میں سے
1	اجے	23	6	گووند	46
2	ارمان	35	7	جے	13
3	آشیش	48	8	کویتا	27
4	دیپتی	30	9	منیشا	32
5	فیضان	25	10	نیرج	38

اس شکل میں نیلم یہ جان پائیں کہ کس بچے کے کتنے نمبر آئے ہیں، لیکن وہ اور زیادہ جاننا چاہتی ہیں۔ دیپکا نے انھیں اس اعداد و شمار کو منظم کرنے کا ایک اور طریقہ بتایا۔ (جدول 3.5)

جدول 3.5

رول نمبر	نام	نمبر 50 میں سے	رول نمبر	نام	نمبر 50 میں سے
3	آشیش	48	4	دیپتی	30
6	گووند	46	8	کویتا	27
10	نیرج	38	5	فیضان	25
2	ارمان	35	1	اجے	23
9	منیشا	32	7	جے	13

© NCERT not to be republished

اب نیلم یہ دیکھ سکتی ہیں کہ کس نے سب سے اچھا کیا اور کس کو مدد کی ضرورت ہے۔

بہت سے اعداد وشمار جو ہم دیکھتے ہیں وہ جدول کی شکل میں لکھے جاتے ہیں۔ ہمارے اسکول کی حاضری، امتحان کے نتائج، کاپی میں بنی فہرستیں، درجۂ حرارت کے ریکارڈ اور بہت سے اور بھی۔ سب جدول کی شکل میں ہی لکھے جاتے ہیں۔ کیا آپ کچھ اور ایسے اعداد شمار سوچ سکتے ہیں جو جدول کی شکل میں ہوں؟

کوشش کیجیے:

اپنی کلاس کے کم از کم 20 بچوں (لڑکے اور لڑکیاں) کا وزن (کلوگرام میں) ناپیے۔ اعداد و شمار کو منظّم کیجیے اور اس کے ذریعے درج ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) سب سے بھاری کون ہے؟ (ii) کون سا وزن سب سے زیادہ عام ہے؟

(iii) آپ کے اور آپ کے سب سے اچھے دوست کے وزن میں کتنا فرق ہے؟

3.4 نمائندہ قیمتیں Representative Values

آپ اپنی روزمرہ کی زندگی میں اصطلاح 'اوسط' اور اوسط سے متعلق بیانات سنتے ہوں گے۔

- ایشا روزانہ اوسطاً 5 گھنٹے اپنی پڑھائی پر خرچ کرتی ہے۔
- سال کے اس وقت میں اوسط درجہ حرارت 40 ڈگری سیلسیس ہوتا ہے۔
- میری کلاس کے بچوں کی اوسط عمر 12 سال ہے۔
- ایک اسکول میں سالانہ امتحانوں کے دوران اوسط حاضری 98 فی صدی تھی۔

اسی طرح کے اور بہت سے بیانات ہو سکتے ہیں۔ اوپر دیے گئے بیانات کے بارے میں سوچیے۔

کیا آپ سمجھتے ہیں کہ پہلے بیان میں بچہ روزانہ پورے 5 گھنٹے پڑھتا ہوگا؟

یا، اس جگہ کا درجۂ حرارت اس خاص وقت میں ہمیشہ 40 ڈگری ہوگا؟

یا، اس کلاس میں ہر طالب علم کی عمر 12 سال ہوگی؟ یقیناً نہیں۔

تو یہ بیانات آپ کو کیا بتا رہے ہیں؟

اوسط سے ہم یہ سمجھتے ہیں کہ ایشا عام طور پر 5 گھنٹے پڑھتی ہے۔ کسی دن پانچ گھنٹوں سے کم پڑھتی ہے اور کسی دن پانچ گھنٹوں سے زیادہ پڑھتی ہے۔

اسی طرح، اوسط درجہ حرارت 40 ڈگری سیلسیس کا مطلب ہے کہ عام طور پر سال کے اس وقت درجہ حرارت 40 ڈگری سیلسیس کے آس پاس رہتا ہے، کبھی کبھی یہ 40 ڈگری سیلسیس سے کم اور کبھی 40°C سے زیادہ بھی ہوسکتا ہے۔

© NCERT not to be republished

لہٰذا، ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ اوسط وہ عدد ہے جو اعداد و شمار یا مشاہدات کے مجموعے کے مرکزی میلان (Central tendency) کو ظاہر کرتا ہے۔ کیونکہ کسی دیئے ہوئے اعداد و شمار کا اوسط سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت کے درمیان میں پایا جاتا ہے۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اوسط کسی اعداد و شمار کے مجموعہ کے مرکزی میلان کی پیائش کا طریقہ ہے۔ اعداد و شمار کی مختلف قسمیں کو ظاہر کرنے کے لیے مختلف قسم کے نمائندے یا مرکزی قیمت کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس طرح کی نمائندہ قیمتوں میں سے ایک ''حسابی اوسط'' ہے۔ دوسری نمائندہ قیمتوں کے بارے میں آپ سبق میں بعد میں پڑھیں گے۔

3.5 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

کسی اعداد و شمار کے مجموعہ کی سب سے زیادہ عام نمائندہ قیمت حسابی اوسط یا اوسط ہے۔ اس کو زیادہ اچھے طریقے سے سمجھنے کے لیے آیئے درج ذیل مثالوں پر ایک نظر ڈالتے ہیں۔

دو برتنوں میں بالترتیب 20 اور 60 لیٹر دودھ آتا ہے۔ اگر دونوں برتنوں میں برابر برابر دودھ آتا ہے تو ہر برتن کا ناپ کیا ہوگا؟

جب ہم اس طرح کا سوال پوچھتے ہیں تو ہم حسابی اوسط کی بات کرتے ہیں۔

اوپر دی گئی صورت حال میں اوسط یا حسابی اوسط ہوگا

$$\frac{\text{دودھ کی کل مقدار}}{\text{برتنوں کی تعداد}} = \frac{20+60}{2}\ \text{لیٹر} = 40\ \text{لیٹر}$$

لہٰذا، ہر برتن میں 40 لیٹر دودھ آئے گا۔

اوسط یا حسابی اوسط کو درج ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{اوسط} = \frac{\text{تمام مشاہدات کا جوڑ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$$

درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1 آشیش تین لگاتار دنوں میں بالترتیب 4 گھنٹے، 5 گھنٹے اور 3 گھنٹے پڑھتا ہے۔ وہ روزانہ اوسطاً کتنے گھنٹے پڑھتا ہے۔

حل آشیش کے پڑھنے کا اوسط وقت ہوگا

$$= \frac{\text{پڑھائی کے کل گھنٹے}}{\text{پڑھائی والے دنوں کی تعداد}} = \frac{4+5+3}{3}\ \text{گھنٹے} = 4\ \text{گھنٹے فی دن}$$

لہٰذا، ہم کہہ سکتے ہیں کہ آشیش اوسطاً روزانہ 4 گھنٹے پڑھتا ہے۔

مثال 2 ایک بلے باز نے چھ پاریوں میں مندرجہ ذیل رن بنائے۔

36, 35, 50, 46, 60, 55

اس کی ایک پاری کا اوسط رن اسکور معلوم کیجیے

حل کل رن = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282

© NCERT not to be republished

اوسط نکالنے کے لیے ہم کو تمام مشاہدات کا جوڑ معلوم کرنا ہے اور پھر اس کو مشاہدات کی کل تعداد سے تقسیم کرنا ہے۔

اس لیے، اس صورت حال میں اوسط = $\frac{282}{6} = 47$ لہٰذا، اوسط رن اسکور 47 ہے

حسابی اوسط کہاں واقع ہوتا ہے

کوشش کیجیے:

آپ اپنے ہفتہ بھر کی پڑھائی کا اوسط وقت کیسے معلوم کریں گے۔

سوچیے، بات چیت کیجیے اور لکھیے:

اوپر دی گئی مثالوں میں دیے گئے اعداد و شمار پر غور کیجیے اور درج ذیل کے بارے میں سوچیے۔

- کیا اوسط ہر ایک مشاہدہ سے بڑا ہوتا ہے؟
- کیا اوسط ہر ایک مشاہدہ سے چھوٹا ہوتا ہے؟

اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔ اسی طرح کی ایک اور مثال بنایئے اور ایسے ہی سوالات کے جواب دیجیے۔

آپ دیکھیں گے کہ اوسط سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کے درمیان میں واقع ہوتا ہے۔

مخصوص طور پر دو اعداد کا اوسط ہمیشہ ان دونوں اعداد کے درمیان ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 5 اور 11 کا اوسط ہے $\frac{5+11}{2}=8$، جو 5 اور 11 کے درمیان میں واقع ہے۔

کیا آپ اس خیال کو یہ دکھانے میں استعمال کر سکتے ہیں کہ کن ہی دو کسری اعداد کے درمیان آپ جتنے چاہیں اتنے کسری اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان ان کا اوسط $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ اور پھر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{3}{8}$ کے درمیان ان کا اوسط $\frac{7}{16}$ ہے اور اسی طرح آگے بھی۔

کوشش کیجیے:

1۔ ایک ہفتہ میں اپنے سونے کے گھنٹوں کا اوسط معلوم کیجیے۔

2۔ $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان کم از کم 5 اعداد معلوم کیجیے۔

3.5.1 سعت (Range)

سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کے درمیان کا فرق ہم کو مشاہدات کے پھیلاؤ کا تصور دیتا ہے۔ اس کو ہم سب سے

© NCERT not to be republished

بڑے مشاہدے میں سے سب سے چھوٹے مشاہدے کو گھٹا کر نکال سکتے ہیں۔ حاصل ہوئے نتیجہ کو ہم مشاہدات کی سعت (Range) کہتے ہیں۔ درج ذیل مثالوں کو دیکھیے۔

مثال 3 ایک اسکول کے 10 اساتذہ کی عمریں (سالوں میں) یہ ہیں

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) سب سے بڑے استاد اور سب سے چھوٹے استاد کی عمریں کیاں ہیں؟

(ii) اساتذہ کی عمروں کی سعت بتائیے

(iii) ان اساتذہ کی اوسط عمر کیا ہے؟

حل

(i) عمروں کو بڑھتی ترتیب میں لگانے پر ہم کو ملتا ہے:

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

ہم نے معلوم کیا کہ سب سے بڑے استاد کی عمر 54 سال اور سب سے چھوٹے استاد کی عمر 23 سال ہے۔

(ii) اساتذہ کی عمروں کی سعت ہے = (54 – 23) سال = 31 سال

(iii) اساتذہ کی اوسط عمر = $\frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10}$ سال

$= \frac{350}{10}$ سال = 35 سال

مشق 3.1

1۔ اپنی کلاس کے کوئی بھی دس طلبا کی لمبائیوں کی سعت معلوم کیجیے۔

2۔ کلاس میں لی گئی جانچ کے درج ذیل مارکس کو جدولی شکل میں منظم کیجیے:

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

(i) کون سا نمبر سب سے بڑا ہے؟ (ii) کون سا نمبر سب سے چھوٹا ہے؟

(iii) اعدادوشمار کی سعت کیا ہے؟ (iv) حسابی اوسط معلوم کیجیے۔

3۔ ابتدائی پانچ مکمل اعداد کا اوسط معلوم کیجیے۔

4۔ ایک بلے باز نے آٹھ پاریوں میں درج ذیل رن بنائے:

58, 76, 40, 35, 46, 45, 0, 100

اوسط اسکور معلوم کیجیے۔

5۔ درج ذیل جدول چار کھیلوں میں ہر کھلاڑی کے بنائے ہوئے پوائنٹس دکھاتی ہے:

کھلاڑی	کھیل 1	کھیل 2	کھیل 3	کھیل 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	نہیں کھیلا	13

اب مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) A کے ہر کھیل میں بنایے گیے پوائنٹس کا اوسط عدد معلوم کرنے کے لیے اوسط معلوم کیجیے۔

(ii) C کے ہر کھیل کے پوائنٹس کا اوسط نکالنے کے لیے کیا آپ کل پوائنٹس کو 3 سے یا 4 سے تقسیم کریں گے؟ کیوں؟

(iii) B چاروں کھیلوں میں کھیلا ہے۔ آپ اوسط کیسے نکالیں گے؟

(iv) کس کی کارکردگی سب سے اچھی ہے؟

6۔ سائنس کی جانچ میں طلبا کے ایک گروپ کے مارکس (100 میں سے) ہیں 85، 76، 90، 85، 39، 48، 56، 95، 81 اور 75۔
معلوم کیجیے:

(i) طلبا کے ذریعے حاصل کیے گیے سب سے زیادہ اور سب سے کم مارکس۔

(ii) حاصل شدہ مارکس کی سعت۔

(iii) گروپ کے حاصل شدہ مارکس کا اوسط۔

7۔ ایک اسکول میں چھ لگاتار سالوں میں ہونے والے داخلوں کی تعداد ہے:

1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820

اس عرصے میں اسکول میں ہونے والے داخلوں کا اوسط معلوم کیجیے۔

8۔ ایک شہر میں کسی خاص ہفتے کے 7 دنوں میں ہونے والی بارش کا ریکارڈ درج ذیل ہے:

دن	پیر	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	سنیچر	اتوار
بارش (ملی میٹر میں)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) اوپر دیے گئے اعداد و شمار میں بارش کی سعت معلوم کیجیے۔

(ii) ہفتہ بھر کی بارش کا اوسط معلوم کیجیے۔

(iii) اوسط سے کم بارش کتنے دن ہوئی۔

9۔ 10 لڑکیوں کی لمبائی (سنٹی میٹر میں) ناپی گئی اور نتائج درج ذیل ہیں:

135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.

© NCERT not to be republished

(i) سب سے لمبی لڑکی کی لمبائی کیا ہے؟ (ii) سب سے چھوٹی لڑکی کی لمبائی کیا ہے؟

(iii) اعداد وشمار کی سعت کیا ہے؟ (iv) لڑکیوں کی اوسط لمبائی کیا ہے؟

(v) کتنی لڑکیوں کی لمبائی اوسط لمبائی سے زیادہ ہے؟

3.6 بہتاتیہ Mode

جیسا کہ ہم کہہ چکے ہیں کہ صرف اوسط ہی مرکزی میلان کی پیائش کا طریقہ نہیں ہے یا نمائندہ قیمتوں کی اکیلی شکل نہیں ہے۔ اعداد وشمار کی مختلف ضروریات کے مطابق مرکزی میلان کے دوسرے پیائش کے طریقے استعمال ہوتے ہیں۔

درج ذیل مثال کو دیکھیے

شرٹ کے مختلف سائزوں کی ہفتہ واری مانگ کو معلوم کرنے کے لیے ایک دکاندار نے مختلف سائز جیسے 90 سنٹی میٹر، 100 سنٹی میٹر، 105 سنٹی میٹر، 110 سنٹی میٹر کے ریکارڈ رکھے۔ ایک ہفتہ کے ریکارڈ مندرجہ ذیل ہیں:

سائز (انچ میں)	90 سنٹی میٹر	95 سنٹی میٹر	100 سنٹی میٹر	105 سنٹری میٹر	110 سنٹری میٹر	کل تعد
بکنے والی شرٹس کی تعداد	8	22	32	37	6	105

اگر وہ بکنے والی شرٹس کا اوسط سائز معلوم کرتا ہے تو کیا آپ سمجھتے ہیں کہ وہ یہ طے کر سکتا ہے کہ اس کو کون سے سائز کی شرٹس رکھنی ہیں؟

$$\text{بکنے والی کل شرٹس کا اوسط} = \frac{\text{کل بکنے والی شرٹس کی تعداد}}{\text{شرٹس کے مختلف سائزوں کی تعداد}} = \frac{105}{5} = 21$$

کیا اسے ہر سائز کی 21 شرٹس حاصل ہوئیں؟ اگر وہ ایسا کرتا ہے تو کیا وہ خریداروں کی ضرورت کو پورا کر پائے گا؟

دکاندار نے ریکارڈ کو دیکھتے ہوئے یہ فیصلہ کیا کہ وہ 95 سنٹی میٹر، 100 سنٹی میٹر، 105 سنٹی میٹر کی شرٹس مہیا کروائے گا۔ اس نے طے کیا کہ باقی سائزوں کی شرٹس وہ نہیں بنوائے گا کیونکہ ان کو بہت کم لوگ خریدتے ہیں۔

ایک دوسری مثال دیکھیے

سلے سلائے کپڑوں کی دکان کے مالک نے کہا، ''میرے یہاں سب سے زیادہ بکنے والے کپڑوں کا سائز 90 سنٹی میٹر ہے۔

مشاہدہ کیجیے کہ یہاں بھی مالک مختلف سائز کی بکنے والی شرٹس کی تعداد کو دیکھ رہا ہے۔ وہ شرٹ کے اس سائز کو دیکھ رہا ہے جو سب سے زیادہ بک رہا ہے۔ یہ اعداد وشمار کی ایک اور نمائندہ قیمت ہے۔ سب سے زیادہ بکنے والا سائز 90 سنٹی میٹر ہے۔ یہ نمائندہ قیمت اعداد وشمار کا بہتاتیہ کہلاتی ہے۔

مشاہدات کے مجموعے کا بہتاتیہ وہ مشاہدہ ہوتا ہے جو سب سے زیادہ بار آتا ہے۔

مثال 4 دیے گئے اعداد کا بہتاتیہ معلوم کیجیے: 1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

© NCERT not to be republished

حل ایک قیمت کے اعداد کو اکٹھا کر کے ترتیب سے لگانے پر ہم کو ملتا ہے

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

اس اعداد وشمار کا بہتاتیہ 2 ہے، کیونکہ یہ دوسرے مشاہدات کے مقابلے سب سے زیادہ بار آتا ہے۔

3.6.1 بڑے اعداد وشمار کا بہتاتیہ Mode of Large Data

ایک سے مشاہدات کو ایک ساتھ رکھنا اور پھر ان کو گننا بہت آسان کام نہیں ہے، اگر مشاہدات کی تعداد زیادہ ہے۔ ایسے حالات میں ہم اعداد وشمار کو جدول کی شکل میں لکھ لیتے ہیں۔ جدول سازی کی شروعات شماریاتی نشانات لگانے اور تعداد معلوم کرنے سے ہوتی ہے۔ جیسا کہ آپ نے پچھلی کلاسوں میں کیا ہے۔

درج ذیل مثالوں کو دیکھیے:

کوشش کیجیے:

بہتاتیہ معلوم کیجیے:

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4,

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14,18, 14

مثال 5 فٹبال مقابلے کرنے والی ٹیموں کے جیتنے کے فرق درج ذیل ہیں:

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,

6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

اس اعداد وشمار کا بہتاتیہ بتائیے۔

حل ذرا اس اعداد وشمار کو جدولی شکل میں لکھیے

جیتنے کا فرق	شماریاتی نشانات	میچوں کی تعداد
1	𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	9
2	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	14
3	𝍸 𝍷𝍷	7
4	𝍸	5
5	𝍷𝍷𝍷	3
6	𝍷𝍷	2
	کل	**40**

جدول کو دیکھ کر، ہم فوراً سے کہہ سکتے ہیں کہ '2' بہتاتیہ ہے، کیونکہ 2 سب سے زیادہ بار آیا ہے۔ لہٰذا، زیادہ تر میچ 2 گول کے فرق سے جیتے گئے ہیں۔

سوچیے، تبادلہ خیال کیجیے اور لکھیے

کیا کسی اعداد کے مجموعے میں ایک سے زیادہ بہتاتیہ ہو سکتے ہیں؟

© NCERT not to be republished

مثال 6 درج ذیل اعداد کا بہتا تیہ بتائیے:

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

حل یہاں، 2 اور 5 دونوں تین تین بار آئے ہیں۔ اس لیے، یہ دونوں ہی اس اعداد و شمار کے لیے بہتا تیہ ہیں۔

خود کریں

1۔ اپنے کلاس کے ساتھیوں کی عمریں (سالوں میں) ریکارڈ کیجیے۔ اعداد و شمار کا جدول بنائیے اور بہتا تیہ معلوم کیجیے۔

2۔ اپنے کلاس کے ساتھیوں کی لمبائیاں ناپیے (سینٹی میٹر میں) اور بہتا تیہ معلوم کیجیے۔

کوشش کیجیے:

1۔ درج ذیل اعداد و شمار کا بہتا تیہ معلوم کیجیے:

12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,

17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

2۔ 25 بچوں کی لمبائیاں (سینٹی میٹر میں) نیچے دی گئی ہیں

168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165,163,

162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

ان کی لمبائیوں کا بہتا تیہ نکالیے؟ یہاں بہتا تیہ سے ہماری سمجھ میں کیا آتا ہے؟

جہاں اوسط، ہمیں ایک اعداد و شمار کی تمام مشاہدات کا اوسط بتاتا ہے وہاں بہتا تیہ سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ کون سا مشاہدہ سب سے زیادہ بار آیا ہے۔

آئیے ذرا مندرجہ ذیل مثالوں پر دھیان دیں:

(a) آپ کو یہ طے کرنا ہے کہ ایک دعوت میں بلائے گئے 25 لوگوں کے لیے کتنی روٹیوں کی ضرورت پڑے گی۔

(b) شرٹس بیچنے والے ایک دکاندار کو یہ طے کرنا ہے کہ اسے اپنا مال پھر سے بھرنا ہے۔

(c) ہمیں اپنے گھر استعمال ہونے والے دروازے کی لمبائی معلوم کرنی ہے۔

(d) پکنک پر جاتے ہوئے، اگر صرف ایک ہی پھل ہر ایک کو خریدنا ہے تو وہ کون سا پھل ہوگا جو ہم کو ملے گا۔

ان میں سے کون سی صورت حال میں اچھا اندازہ لگانے کے لیے بہتا تیہ کو ہم استعمال کر سکتے ہیں؟

پہلے بیان پر دھیان دیجیے۔ مان لیجیے ہر آدمی کے لیے روٹیوں کی تعداد ہے

2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

© NCERT not to be republished

اس اعداد وشمار کا بہتاتیہ 2 روٹی ہے۔ اگر ہم اس اعداد وشمار کی نمائندہ قیمت کے لیے بہتاتیہ کا استعمال کریں تو ہم کو 50 روٹیوں کی ضرورت ہوگی۔ 25 آدمیوں میں ہر ایک کے لیے دو روٹی جب کہ روٹیوں کی کل تعداد نا کافی ہے۔ کیا اوسط ایک مناسب نمائندہ قیمت ہے؟

تیسرے بیان میں جو کہ دروازے کی لمبائی سے متعلق ہے، یہ لمبائی ان لوگوں کی لمبائیوں سے متعلق ہے جن کو یہ استعمال کرنا ہے۔ مان لیجیے یہاں 5 بچے اور 4 بڑے لوگ ہیں جو اس دروازے کو استعمال کریں گے اور 5 بچوں میں سے ہر ایک بچے کی لمبائی 135 سنٹی میٹر کے قریب ہے۔ تو ان لمبائیوں کا بہتاتیہ 135 سنٹی میٹر ہوا۔ کیا ہمیں 144 سنٹی میٹر اونچا دروازہ چاہیے؟ کیا سبھی بڑے لوگ اس دروازے سے نکل پائیں گے؟ یہ صاف ظاہر ہو گیا کہ اس اعداد وشمار کے لیے بہتاتیہ مناسب نمائندہ قیمت نہیں ہے۔ کیا یہاں اوسط مناسب نمائندہ قیمت ہوگا؟

کیوں نہیں؟ اونچائی کی کون سی نمائندہ قیمت یہ طے کرنے کے لیے استعمال ہوگی کہ دروازے کی اونچائی کیا ہے؟

اسی طرح باقی بیانات کا تجزیہ کیجیے اور دیکھیے کہ ان کے لیے کون سی نمائندہ قیمت زیادہ کارآمد ہوگی۔

کوشش کیجیے:

اپنے دوستوں سے بات چیت کیجیے اور بتائیے

(a) دو ایسی حالتیں جہاں پر اوسط ایک مناسب نمائندہ قیمت کی طرح استعمال ہو، اور

(b) دو ایسی حالتیں جہاں پر بہتاتیہ ایک مناسب نمائندہ قیمت کی طرح استعمال ہو۔

3.7 وسطانیہ Median

ہم نے دیکھا کہ کچھ حالات میں حسابی اوسط ہی مرکزی میلان کی مناسب پیمائش کا طریقہ ہوتا ہے جب کہ کچھ دوسرے صورت حال میں مرکزی میلان کی مناسب پیمائش کا طریقہ بہتاتیہ ہوتا ہے۔

آیئے ایک دوسری مثال کو دیکھتے ہیں۔ 17 طلبا کے ایک گروپ کی لمبائی مندرجہ ذیل دی گئی ہیں:

106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

کھیل کی ٹیچر ان طلبا کو دو گروپوں میں برابر برابر اس طرح بانٹنا چاہتی ہیں کہ ایک خاص لمبائی سے بڑے بچے ایک گروپ میں ہوں اور اس لمبائی سے چھوٹے بچے دوسرے گروپ میں۔ وہ ایسا کیسے کریں گی؟

آیئے دیکھتے ہیں کہ ان کے دوسرے طریقے کیا کیا ہیں۔

(i) وہ اوسط معلوم کر سکتی ہیں۔ اوسط ہے

© NCERT not to be republished

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$=\frac{1930}{17}=113.5$$

تو، اگر ٹیچر اوسط لمبائی کی بنیاد پر طلبا کو دو گروپس میں بانٹ سکتی ہیں کہ ایک گروپ میں اوسط لمبائی سے کم لمبائی والے طلبا ہوں اور دوسرے گروپ میں اوسط لمبائی سے زیادہ لمبائی والے طلبا ہوں تو دونوں گروپس میں طلبا کی تعداد کم زیادہ ہوگی۔ ایک گروپ میں 7 اور دوسرے میں 10 ہوں گے۔

(ii) دوسرا طریقہ ہے کہ وہ بہتاتیہ نکال لیں۔ 115 سینٹی میٹر وہ مشاہدہ ہے جس کی تعداد سب سے زیادہ ہے۔ جو کہ یہاں بہتاتیہ ہوا۔ یہاں پر 7 طلبا بہتاتیہ سے کم لمبائی کے ہیں اور 10 طلبا بہتاتیہ کے برابر یا زیادہ لمبائی کے ہیں۔ اس لیے اس بنیاد پر بھی ہم طلبا کو دو برابر گروپس میں نہیں بانٹ سکتے ہیں۔

اس لیے اب کسی اور نمائندہ قیمت یا مرکزی میلان کے پیائش کے کسی دوسرے طریقہ کے بارے میں سوچتے ہیں۔ اس کے لیے ہم ایک بار پھر طلبا کی لمبائیاں دیکھتے ہیں اور انہیں بڑھتی ترتیب میں لگا لیتے ہیں۔ ہمارے پاس درج ذیل مشاہدات ہیں۔

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

اس اعداد و شمار میں درمیانی قیمت 115 ہے۔ کیونکہ یہ طلبا کو 8 – 8 طلبا کے برابر گروپس میں بانٹ دیتی ہے۔ اس قیمت کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ وسطانیہ وہ قیمت ہوتی ہے جو کسی اعداد و شمار کے بالکل درمیان میں ہوتی ہے۔ (جب گھٹتی یا بڑھتی ترتیب میں لگایا جائے) اور آدھے مشاہدات اس سے زیادہ اور آدھے اس سے کم ہوتے ہیں۔ کھیل کی ٹیچر نے یہ فیصلہ کیا کہ بیچ والے طالب علم کو کھیل کا ریفری بنا دیں گے۔

کوشش کیجیے:

آپ کے دوست نے دیے گئے اعداد و شمار کا وسطانیہ اور بہتاتیہ نکالا ہے۔ اگر اس میں کوئی غلطی ہے تو اس کو ٹھیک کر دیجیے اور بتائیے

35, 32, 35, 42, 38, 32, 34

وسطانیہ=42، بہتاتیہ=32

یہاں ہم صرف ان معاملات کو دیکھیں گے جہاں مشاہدات کی تعداد طاق عدد ہے۔

لہٰذا، دیے گئے اعداد و شمار کو پہلے گھٹتی یا بڑھتی ترتیب میں لگائیے۔ بیچ والا مشاہدہ وسطانیہ ہے۔

دھیان دیجیے کہ عام طور پر وسطانیہ اور بہتاتیہ کی قیمتیں ایک سی نہیں ہوتیں۔

لہٰذا ہم نے یہ جانا کہ مشاہدات کے مجموعہ یا اعداد و شمار کی نمائندہ قیمتیں اوسط، بہتاتیہ اور وسطانیہ ہیں۔

یہ اعداد و شمار کی سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمت کے درمیان میں واقع ہوتے ہیں۔ ان کو مرکزی میلان کے پیائش کے طریقے کہا جاتا ہے۔

مثال 7 اعداد و شمار کا وسطانیہ معلوم کیجیے: 24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

حل ہم اعداد و شمار کو بڑھتی ترتیب میں لگائیں گے۔ یعنی 17, 18, 24, 25, 35, 36, 46۔ وسطانیہ درمیانی مشاہدہ ہے۔ اس لیے 25 وسطانیہ ہے۔

© NCERT not to be republished

مشق 3.2

1۔ 15 طلبا کے ریاضی کی جانچ (25 میں سے) کے اسکور نیچے دیے گئے ہیں

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

اس اعدادوشمار کا وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔ کیا یہ ایک سے ہیں۔

2۔ ایک کرکٹ کے میچ میں 11 کھلاڑیوں کے اسکور حسب ذیل ہیں

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

اس اعدادوشمار کے لیے اوسط، بہتاتیہ اور وسطانیہ معلوم کیجیے۔ کیا یہ تینوں ایک سے ہیں۔

3۔ 15 طلبا کی وزن (کلوگرام) میں دیے گئے ہیں

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

(i) اس اعدادوشمار کے لیے بہتاتیہ اور وسطانیہ معلوم کیجیے۔

(ii) کیا یہاں ایک سے زیادہ بہتاتیہ ہے؟

4۔ دیے گئے اعدادوشمار کا بہتاتیہ اور وسطانیہ معلوم کیجیے 14, 13, 14, 12, 19, 14, 12, 16, 13

5۔ بتائیے کیا درج ذیل بیانات درست ہیں یا نہیں:

(i) بہتاتیہ ہمیشہ اعدادوشمار میں سے ہی ایک عدد ہوتا ہے۔

(ii) اوسط، اعدادوشمار میں سے ہی ایک عدد ہوتا ہے۔

(iii) وسطانیہ، اعدادوشمار میں سے ہی ایک عدد ہوتا ہے۔

(iv) اعدادوشمار 6، 4، 3، 8، 9، 12، 13، 9 کا اوسط 9 ہے۔

3.8 ایک مختلف مقصد کے لیے بار گراف کا استعمال
Use Of Bar Graphs With A Different Purpose

پچھلے سال ہم نے دیکھا تھا کہ کس طرح مختلف معلومات کو جمع کیا جاتا ہے پھر پہلے ان کو تعدد کی تقسیم کاری جدول (frequency distribution table) میں ترتیب دیتے ہیں اور پھر اس کو بصری اظہار کے لیے تصویری گراف یا بار گراف کا استعمال کیا جاتا ہے۔ آپ بار گراف کو دیکھ کر اعدادوشمار کے بارے میں نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔ آپ ان بار گراف پر منحصر معلومات بھی حاصل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ کہہ سکتے ہیں کہ بہتاتیہ کا بار سب سے زیادہ لمبا ہے۔ اگر بار تعدد کو ظاہر کر رہے ہیں۔

3.8.1 پیمانہ کا انتخاب Choosing a Scale

ہم جانتے ہیں کہ اعداد کو یکساں چوڑائی کے بار کے ذریعے ظاہر کرنے کے طریقے کو بار گراف کہتے ہیں۔ جہاں بار کی لمبائی آپ کے

© NCERT not to be republished

ذریعے منتخب ہوئے پیمانہ اور تعدد پر منحصر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر بار گراف میں جہاں اکائیوں کی تعداد کو دکھانا ہے۔ گراف ایک مشاہدہ کے لیے ایک اکائی لمبائی کو ظاہر کر رہا ہے اور ان اعداد کو دہائی یا سیکڑے میں ظاہر کرنا ہے تو ایک اکائی لمبائی 10 یا 100 مشاہدوں کو بھی ظاہر کر سکتی ہے۔ درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

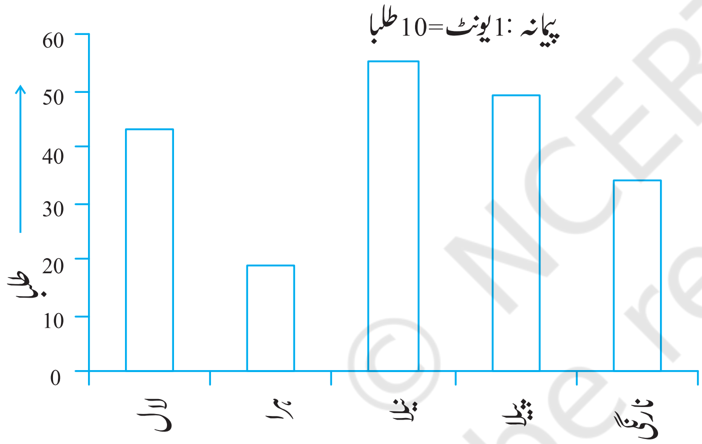
مثال 8 چھٹی اور ساتویں کلاس کے دوسو طلبا سے کہا گیا کہ اسکول کی بلڈنگ کو رنگوانے کے لیے وہ اپنا پسندیدہ رنگ بتائیں۔ نتائج درج ذیل جدول میں دکھائے گئے ہیں۔ دیے گئے اعداد و شمار کے لیے بار گراف بنائیے۔

پسندیدہ رنگ	لال	ہرا	نیلا	پیلا	نارنجی
طلبا کی تعداد	43	19	55	49	34

بار گراف کی مدد سے مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) کون سا رنگ سب سے زیادہ پسندیدہ ہے اور کون سا سب سے کم پسندیدہ رنگ ہے؟

(ii) کل کتنے رنگ ہیں؟ وہ کیا ہیں؟



حل ایک مناسب پیمانہ کا انتخاب کیجیے جیسا کہ درج ذیل دکھایا گیا ہے۔

پیمانہ 0 سے شروع کیجیے۔ اعداد و شمار میں سب سے بڑی قیمت 55 ہے۔ اس لیے 55 سے بڑی قیمت جیسے 60 پر پیمانہ ختم کیجیے۔ محووروں پر برابر فاصلہ، جیسے 10 سے پیمانہ کو بڑھائیے۔ آپ جانتے ہیں کہ تمام بار 0 اور 60 کے درمیان واقع ہیں۔ ہم پیمانہ ایسا چنتے ہیں کہ 0 سے 60 کے درمیان کی لمبائی نہ تو بہت زیادہ لمبی ہو اور نہ ہی بہت چھوٹی۔

یہاں ہم 1 اکائی 10 طلبا کے لیے لیتے ہیں۔ پھر ہم گراف بناتے ہیں اور ان کے نام دیتے ہیں، جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

بار گراف سے ہم نتائج اخذ کرتے ہیں کہ

(i) نیلا سب سے زیادہ پسندیدہ رنگ ہے۔ (کیونکہ نیلے رنگ کو دکھانے والا بار سب سے لمبا ہے)

(ii) ہرا رنگ سب سے کم پسند کیا گیا ہے۔ (کیونکہ ہرے رنگ کو دکھانے والا بار سب سے چھوٹا ہے)

(iii) کل پانچ رنگ ہیں۔ یہ ہیں لال، ہرا، نیلا، پیلا اور نارنجی۔ (ان کو افقی خط پر دیکھا جا سکتا ہے)

مثال 9 درج ذیل اعداد و شمار میں کسی خاص کلاس کے چھ طلبا کے کل مارکس (600 میں سے) دکھائے گئے ہیں۔ اعداد و شمار کو بار گراف کی مدد سے دکھائیے۔

طلبا	اجے	بالی	دیپتی	فیاض	گیتیکا	ہری
حاصل کردہ مارکس	450	500	300	360	400	540

© NCERT not to be republished

حل

(i) مناسب پیمانے کو چننے کے لیے ہم 100 کے اضافہ سے برابر برابر وقفہ لیں گے۔ لہٰذا، 1 اکائی 100 مارکس کو ظاہر کرے گی۔ (اگر ہم 1 اکائی سے 10 مارکس کو ظاہر کریں تو کیا پریشانی ہوگی)

(ii) اب اعداد و شمار کو بار گراف کی مدد سے ظاہر کیجیے۔

دوہرا بار گراف بنانا

درج ذیل دیے گئے اعداد و شمار میں دو مجموعوں پر غور کیجیے، جس میں سال کے پورے بارہ مہینوں کے لیے دو شہروں مارگیٹ اور ابردین میں روزانہ سورج نظر آنے کے اوسط گھنٹے دیے گئے ہیں۔ یہ دونوں شہر قطب جنوبی کے نزدیک ہیں۔ اس لیے یہاں چند گھنٹے ہی سورج نظر آتا ہے۔

مارگیٹ میں												
	جنوری	فروری	مارچ	اپریل	مئی	جون	جولائی	اگست	ستمبر	اکتوبر	نومبر	دسمبر
سورج نظر آنے کے اوسط گھنٹے	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2
ابردین میں												
سورج نظر آنے کے اوسط گھنٹے	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

الگ الگ بار گراف بنا کر آپ درج ذیل سوالات کے جواب دے سکتے ہیں۔

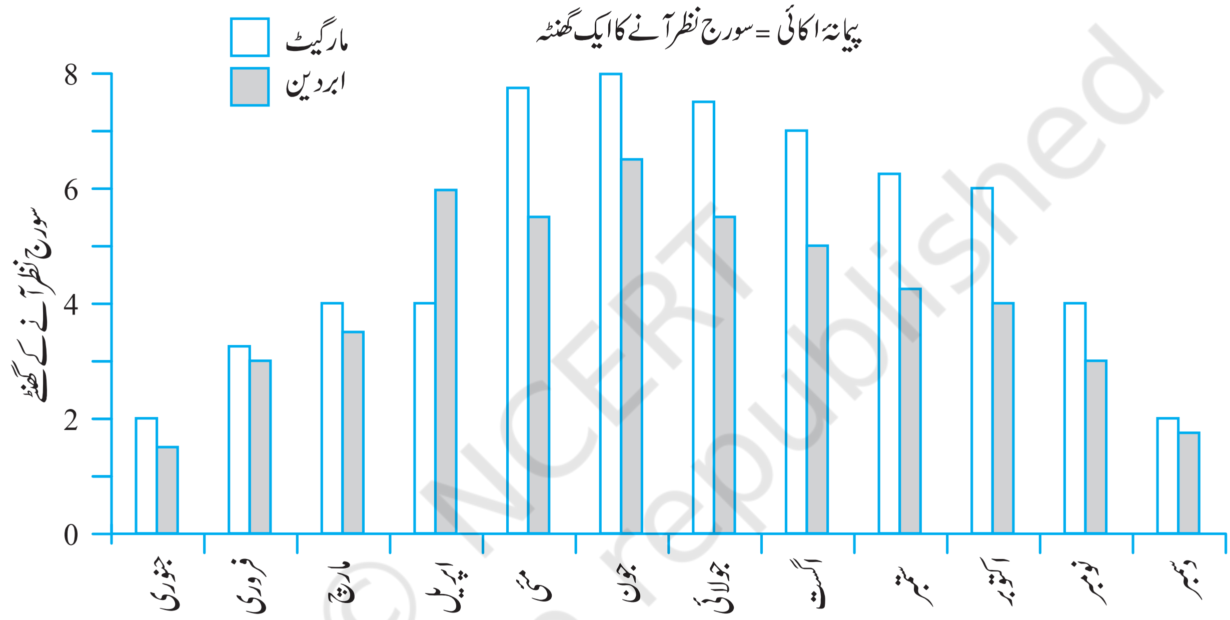
(i) کون سے مہینے میں ہر شہر میں سب سے زیادہ سورج دکھائی دیتا ہے؟

(ii) کون سے مہینے میں ہر شہر میں سب سے کم سورج دکھائی دیتا ہے؟

جب کہ کچھ ایسے سوالات ''جیسے کسی خاص مہینے میں کون سے شہر میں زیادہ دیر سورج دکھائی دیتا ہے'' کے جواب دینے کے لیے دونوں شہروں کے سورج دکھائی دینے کے اوسط گھنٹوں کا موازنہ کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ ایسا کرنے کے لیے ہم دونوں شہروں کے بارے میں ساتھ ساتھ معلومات دینے والا گراف یعنی دوہرا گراف بنانا سیکھیں گے۔

یہ بار گراف (تصویر 3.1) دونوں شہروں میں سورج دکھائی دینے کے اوسط گھنٹے دکھا رہا ہے۔

ہر مہینے کے لیے ہمارے پاس دو بار ہیں، جن کی اونچائیاں، ہر شہر میں سورج دکھائی دینے کے اوسط گھنٹے دکھا رہی ہیں۔ اس سے ہمیں یہ پتا لگ سکتا ہے کہ اپریل مہینے کے علاوہ ہمیشہ ابردین کے مقابلہ مارگیٹ میں سورج زیادہ دیر دکھائی دیتا ہے۔

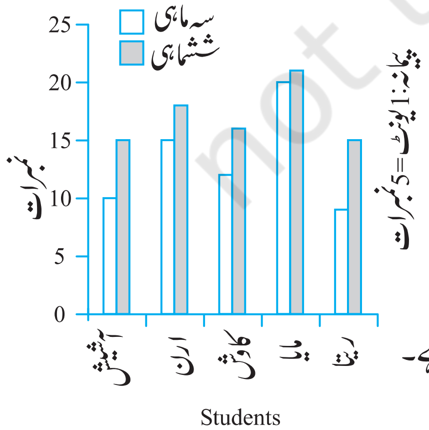


شکل 3.1

آیئے ایک اور مثال دیکھتے ہیں جو ہم سے اور زیادہ متعلق ہے۔

مثال 10 ایک ریاضی کے ٹیچر یہ دیکھنا چاہتے تھے کہ سہ ماہی جانچ کے بعد انہوں نے پڑھنے کا جو نیا طریقہ استعمال کیا ہے وہ کارگر ہے یا نہیں۔ انہوں نے پانچ سب سے کمزور بچوں کے تیماہی جانچ کے مارکس لیے (25 میں سے) اور ششماہی امتحان میں (25 میں سے)

طلبا	آشیش	ارون	کاوِش	مایا	ریٹا
سہ ماہی	10	15	12	20	9
ششماہی	15	18	16	21	15



حل انہوں نے ایک دوہرا بار گراف بنایا اور انہیں معلوم ہوا کہ زیادہ تر بچوں میں نمایاں فرق آیا ہے۔ اس لیے ٹیچر نے یہ طے کیا کہ وہ یہ نیا طریقہ جاری رکھیں گے۔

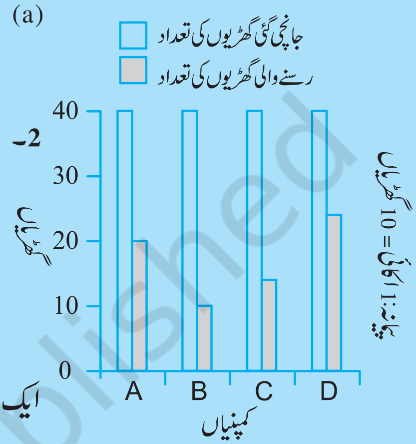
کوشش کیجیے:

1۔ بارگراف (تصویر 3.2) مختلف کمپنیوں کے ذریعے بنائی گئیں ایسی گھڑیاں جن پر پانی کا اثر نہیں ہوتا ہے، کی جانچ کے لیے ایک سروے کے نتائج دکھا رہا ہے۔

ہر کمپنی یہ دعویٰ کرتی ہے کہ ان کی گھڑیوں پر پانی کا اثر نہیں ہوتا ہے۔ ایک جانچ کرنے کے بعد اوپر دیے گئے نتائج سامنے آئے۔

(a) کیا آپ ہر کمپنی کی جانچ کی گئی گھڑیوں کی تعداد اور رسنے والی گھڑیوں کی تعداد کی کسر بتا سکتے ہیں۔

(b) اس بنیاد پر کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ کون سی کمپنی کی گھڑیاں زیادہ اچھی ہیں۔



شکل 3.2

2۔ 1995، 1996، 1997 اور 1998 میں انگریزی اور ہندی کی کتابوں کی بکری دی گئی ہے۔

سال	1995	1996	1997	1998
انگریزی	350	400	450	620
ہندی	500	525	600	650

ایک دوہرا بارگراف بنائیے اور درج ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

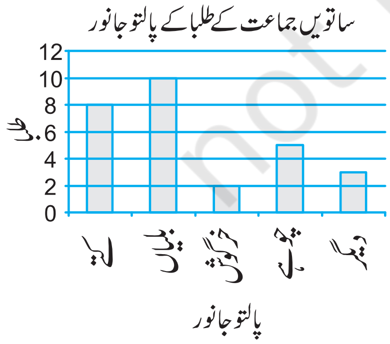
(a) کون سے سال میں دونوں زبانوں کی کتابوں کی بکری میں سب سے کم فرق ہے؟

(b) کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ انگریزی کی کتابوں کی مانگ زیادہ تیزی سے بڑھ رہی ہے؟ وضاحت کیجیے۔

مشق 3.3

1۔ درج ذیل سوالات کے جواب دینے کے لیے بارگراف (تصویر 3.3) کا استعمال کیجیے۔

(a) کون سا پالتو جانور سب سے زیادہ مقبول ہے؟ (b) کتنے طلبا کے پالتو جانور کتے ہیں۔



شکل 3.3

شکل 3.4

© NCERT not to be republished

2۔ بار گراف پڑھیے (تصویر3.4) جس میں پانچ لگاتار سالوں میں ایک دکاندار کی بیچی گئی کتابوں کی تعداد دکھائی گئی ہے اور مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے:

(i) تقریباً کتنی کتابیں بیچی گئیں 1989 میں؟ 1990 میں؟ 1992 میں؟

(ii) کون سے سال میں تقریباً 475 کتابیں بکیں؟ تقریباً 225 کتابیں بکیں؟

(iii) کون سے سال میں 250 کتابوں سے کم بکیں؟

(iv) کیا آپ وضاحت کرسکتے ہیں کہ 1989 میں بیچی گئی کتابوں کا تخمینہ آپ کیسے لگائیں گے؟

3۔ چھ مختلف کلاسوں کے طلبا کی تعداد نیچے دی گئی ہے۔ اعداد و شمار کا بار گراف بنایئے۔

کلاس	پانچویں	چھٹی	ساتویں	آٹھویں	نویں	دسویں
طلبا کی تعداد	135	120	95	100	90	80

(a) آپ پیمانہ کا انتخاب کیسے کریں گے؟

(b) مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے:

(i) کس کلاس میں طلبا کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟ اور سب سے کم؟

(ii) چھٹی کلاس کے طلبا کی آٹھویں کلاس کے طلبا کے ساتھ تناسب معلوم کریں۔

4۔ پہلی ٹرم اور دوسری ٹرم میں ایک طالب علم کی کارکردگی دی گئی ہے۔ مناسب پیمانہ کا استعمال کرکے ایک دوہرا بار گراف بنایئے اور درج ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

مضمون	انگریزی	ہندی	ریاضی	سائنس	سماجی علوم
پہلی ٹرم (نمبر شمار 100)	67	72	88	81	73
دوسری ٹرم (نمبر شمار 100)	70	65	95	85	75

(i) کون سے مضمون میں بچے کی کارگزاری سب سے زیادہ بہتر ہوئی ہے؟

(ii) کون سے مضمون کی کارکردگی میں تنزلی ہوئی۔

5۔ ایک کالونی کے سروے سے حاصل ہوئی معلومات کا یہ اعداد و شمار دیکھیے۔

پسندیدہ کھیل	کرکٹ	باسکٹ بال	تیراکی	ہاکی	دوڑیں
دیکھنا	1240	470	510	430	250
کھیلنا	620	320	320	250	105

(i) مناسب پیمانہ کا انتخاب کرکے دوہرا بار گراف بنایئے۔ آپ اس بار گراف سے کیا معلومات حاصل کرتے ہیں؟

(ii) کون سا کھیل سب سے زیادہ مقبول ہے؟

(iii) لوگ کھیلوں کو کھیلنا زیادہ پسند کرتے ہیں، یا دیکھنا؟

6۔ اس باب کی شروعات میں جو اعداد و شمار، مختلف شہرں کے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجۂ حرارت کو دکھاتا ہے، اس کو ذرا دیکھیے۔ (جدول 3.1) اعداد و شمار کا استعمال کر کے دوہرا بار گراف بنائیے اور مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) دیے گئے اعداد و شمار میں کون سے شہر میں زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجۂ حرارت کے درمیان کا فرق سب سے زیادہ ہے؟

(ii) کون سا شہر سب سے گرم ہے اور کون سا سب سے زیادہ ٹھنڈا ہے؟

(iii) ایسے دو شہروں کے نام بتائیے جن میں ایک کا زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت دوسرے شہر کے کم سے کم درجۂ حرارت سے بھی کم ہے۔

(iv) اس شہر کا نام بتائیے جس کے زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت اور کم سے کم درجۂ حرارت کا فرق سب سے کم ہو۔

3.9 امکان اور احتمال Chance and Probability

ہماری روزمرہ کی زندگی میں اکثر یہ الفاظ سننے کو ملتے ہیں۔ ہم اکثر کہتے ہیں ''آج بارش ہونے کا کوئی امکان نہیں''۔ ''یہ بہت ممکن ہے کہ ہندوستان ورلڈ کپ جیت جائے''۔ آیئے ان اصطلاحوں کو کچھ اور اچھے طریقے سے سمجھتے ہیں۔ بیانات پر غور کیجیے:

(i) سورج مغرب سے نکلے گا۔ (ii) ایک چیونٹی 3 میٹر لمبی ہوگی۔

(iii) اگر آپ ایک زیادہ حجم کا مکعب لیں گے تو اس کے ضلع کی لمبائی بھی زیادہ ہوگی۔

(iv) اگر آپ زیادہ رقبے والا دائرہ لیں گے تو اس کا نصف قطر بھی بڑا ہوگا۔ (v) ہندوستان اگلا کرکٹ کے میچوں کا سلسلہ جیتے گا۔

اگر ہم اوپر دیے گئے بیانات پر غور کریں تو آپ کہہ سکتے ہیں کہ سورج کا مغرب سے نکلنا ناممکن ہے۔ ایک چیونٹی کا 3 میٹر لمبا ہونا بھی ناممکن ہے۔ دوسری طرف ایک دائرہ کا رقبہ زیادہ ہے تو یقینی طور پر اس کا نصف قطر بھی زیادہ ہوگا۔ یہی بات آپ زیادہ حجم والے مکعب کے ضلع کی لمبائی بھی زیادہ ہوگی، کے لیے بھی کہہ سکتے ہیں۔ اور دوسری طرف ہندوستان اگلا کرکٹ کا سلسلہ جیت بھی سکتا ہے اور ہار بھی سکتا ہے۔ دونوں باتیں ممکن ہے۔

کوشش کیجیے:

کچھ ایسی صورت حالوں کے بارے میں سوچیے، ہر ایک کے لیے کم از کم تین مثالیں، جو کہ یقینی طور پر ہوں، کچھ جو ناممکن ہوں اور کچھ ایسی جو ہو بھی سکتی ہے اور نہیں بھی۔ یعنی جس کا کچھ امکان ہو

3.9.1 امکان Chance

اگر آپ ایک سکّے کو اچھالیں، کیا آپ ہمیشہ پیش گوئی کر سکتے ہیں کہ کیا آئے گا؟ ذرا ایک سکّے کو اچھالیں اور ہر بار پیش گوئی کریں کہ کیا آئے گا۔ اپنے مشاہدات کو درج ذیل جدول میں بھریے۔

اچھال	پیش گوئی	نتیجہ

اس کو 10 بار کیجیے۔ آنے والے نتیجوں کو دیکھیے۔ کیا آپ کو اس میں کوئی پیٹرن نظر آ رہا ہے۔ ہر ہیڈ کے بعد کیا آتا ہے؟ کیا ہمیشہ

© NCERT not to be republished

ہر بار آپ کا ہیڈ ہی آئے گا۔ 10 بار سکہ اوراچھالیے اور اپنے مشاہدات جدول میں لکھیے۔

آپ پائیں گے کہ ان مشاہدات کا کوئی پیٹرن نہیں ہے۔ درج ذیل جدول میں سوشیلا اور سلمٰی کے ذریعہ 25 بار سکہ اچھالنے کے نتائج دیے گئے ہیں۔ یہاں H ہیڈ اور T ٹیل کو ظاہر کرتا ہے۔

اعداد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
نتائج	H	T	T	H	T	T	T	H	T	T	H	H	H	H	H
اعداد	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
نتائج	T	T	H	T	T	T	T	T	T	T					

یہ اعداد و شمار آپ کو کیا بتا رہا ہے؟ ہیڈ اور ٹیل کی پیش گوئیوں کے لیے کیا آپ کوئی پیٹرن بتا سکتے ہیں؟ یقیناً یہاں ہیڈ اور ٹیل کے ہونے کا کوئی پیٹرن نہیں ہے۔ جب آپ ہر بار سکہ اچھالتے ہیں تو ہر بار یا تو ہیڈ آئے گا یا پھر ٹیل۔ کچھ بھی ہوسکتا ہے۔ یہ صرف امکان ہے کہ ہر بار سکہ اچھالنے پر ان دونوں میں سے کوئی ایک آئے گا۔

اوپر کے اعداد و شمار میں ہیڈ اور ٹیل کی تعداد الگ الگ گنیے۔ کچھ اور بار سکہ اچھالیے اور ریکارڈ کرتے رہیے کہ آپ کو کیا ملا۔ معلوم کیجیے کہ کل کتنی بار آپ کو ہیڈ ملا اور کتنی بار ٹیل ملا۔

آپ ایک پانسے سے بھی کھیل سکتے ہیں۔ ایک پانسے کے چھ رخ ہوتے ہیں۔ جب آپ پانسہ پھینکتے ہیں تو کیا آپ پیش گوئی کرسکتے ہیں کہ کیا آئے گا؟ لوڈو یا سانپ سیڑھی کھیلتے وقت اکثر یہ چاہتے ہوں گے کہ کوئی مخصوص نتیجہ آجائے۔

کیا پانسے کا نتیجہ آپ کی مرضی کے مطابق ہی ہمیشہ آتا ہے؟ ایک پانسہ لیجیے اور اس کو 150 بار پھینکیے اور درج ذیل جدول کو بھریے۔

پانسہ کا عدد	شماریاتی نشانات	کتنی بار یہ آیا
1		
2		

ہر بار نتیجہ آنے پر آنے والے عدد کے سامنے شماریاتی نشان لگائیے۔ مثال کے طور پر پہلی باری میں آپ کا 5 آیا۔ 5 کے سامنے ایک شماریاتی نشان لگائیے۔ اگلی باری میں 1 آیا تو 1 کے لیے نشان لگا دیجیے۔ مناسب عدد کے لیے شماریاتی نشانات لگاتے جائیے۔ اس مشق کو 150 بار کیجیے اور ہر باری میں آنے والے عدد معلوم کیجیے۔

اوپر حاصل ہوئے اعداد و شمار کے لیے بار گراف بنائیے جو یہ دکھا رہا ہو کہ کتنی بار 1، 2، 3، 4، 5، 6 آیا۔

© NCERT not to be republished

کوشش کیجیے:

(اس کو گروپ میں کیجیے)

1۔ 100 مرتبہ ایک سکے کو اچھالیے اور اعداد و شمار کو ریکارڈ کر لیجیے۔ معلوم کیجیے کہ کتنی بار ہیڈ آیا اور کتنی بار ٹیل آیا۔

2۔ آفتاب نے 250 بار ایک پانسہ پھینکا اور اس کو مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوا۔ اس اعداد و شمار کے لیے ایک بار گراف بنائیے۔

پانسہ کے اعداد	شماریاتی نشانات
1	ǁ 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
2	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
3	ǁ 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
4	ǁ 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
5	ǀǀǀ 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

3۔ ایک پانسہ کو 100 بار پھینکئے اور اس اعداد و شمار کو ریکارڈ کیجیے۔ دیکھیے کتنی بار 1، 2، 3، 4، 5، 6 آیا۔

احتمال کیا ہے (What is Probability)

ہم جانتے ہیں کہ جب ہم ایک سکہ اچھالتے ہیں تو دو نتائج ممکن ہیں۔ ہیڈ یا ٹیل۔ اور ایک پانسہ کے لیے چھ نتائج ممکن ہیں۔ ہم اپنے تجربات سے یہ بھی جانتے ہیں کہ ایک سکہ میں ہیڈ یا ٹیل آنے کے برابر برابر امکان ہوتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہیڈ یا ٹیل کا احتمال برابر ہے اور ہر ایک کے لیے یہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

پانسہ میں 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 آنے کے برابر برابر امکان ہیں اور ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{6}$ ہے۔ اس کے بارے میں ہم اگلی کلاسوں میں پڑھیں گے۔ لیکن جو کچھ ہم کر چکے ہیں اس سے یہ صاف ظاہر ہے کہ وہ نتائج جن کے امکانات بہت سارے ہوتے ہیں، ان کا احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہوتا ہے۔ وہ امکان جن کا ہونا ناممکن ہے ان کا احتمال 0 ہے اور وہ امکان جو ضروری یا یقیناً ہوں گے ان کا احتمال 1 ہے۔

کسی بھی دی گئی صورت حال میں ہمیں مختلف ممکنہ نتائج کو سمجھنے کی ضرورت ہے۔ اور ہر نتیجہ کے ممکن امکانات کو بھی سمجھنے کی ضرورت ہے۔ یہ بھی ممکن ہے کہ نتائج کے ہونے کے امکانات سکہ اور پانسہ کی طرح برابر برابر نہ ہوں۔ مثال کے طور پر اگر ایک ڈبے میں 5 لال رنگ کی بال، 9 سفید رنگ کی بال ہوں اور بنا دیکھے ایک بال نکالنی ہو تو سفید بال نکالنے کے امکان زیادہ ہوں گے۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کیوں؟ لال بال نکالنے کے لیے کیا امکانات ہیں اور سفید بال نکالنے کے لیے کیا امکانات ہیں۔ دونوں کے احتمال 0 اور 1 کے درمیان ہی ہوں گے۔

کوشش کیجیے:

پانچ ایسی صورت حال کے بارے میں سوچیے جہاں نتائج کے امکانات برابر برابر نہ ہوں۔

مشق 3.4

1۔ مندرجہ ذیل میں بتائیے کہ کون سے ہونا ضروری ہیں، ناممکن ہیں، کون ہوسکتا ہے مگر ضروری نہیں ہے۔

(i) آپ آج گزرے کل سے زیادہ بڑے ہیں۔ (ii) ایک اچھالے گئے سکے میں اوپر ہیڈ آئے گا۔

(iii) ایک پانسہ کو پھینکنے سے اوپر 8 آئے گا۔ (iv) اگلی ٹریفک لائٹ ہری ہوگی۔

(v) کل بادل ہوں گے۔

2۔ ایک ڈبہ میں 6 ماربلس ہیں جن کے اوپر 1 سے 6 تک کے اعداد لکھے ہیں۔

(i) 2 نمبر لکھا عدد نکالنے کا احتمال کیا ہے۔ (ii) 5 نمبر لکھا عدد نکالنے کا احتمال کیا ہے۔

3۔ ایک سکہ کو اچھال کر یہ فیصلہ کیا گیا کہ کون سی ٹیم پہلے کھیلے گی۔ آپ کی ٹیم کھیل شروع کرے گی، اس بات کا احتمال کیا ہے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ اعداد وشمار کو جمع کرنے، ریکارڈ کرنے اور اس کا اظہار کرنے سے ہم کو مدد ملتی ہے۔ اپنے تجربات کو منظّم کرنے میں اور ان سے نتائج اخذ کرنے میں۔

2۔ اعداد وشمار جمع کرنے سے پہلے ہم کو یہ جاننا ضروری ہے کہ اس کا کیا استعمال ہے۔

3۔ وہ اعداد وشمار جو جمع کیا گیا ہے، اس کو ضرورت ہے موزوں جدول میں منظّم کرنے کی، تاکہ اس کو آسانی سے سمجھا جا سکے۔

4۔ اوسط وہ عدد ہے جو اعداد وشمار یا مشاہدات کے گروپ کے مرکزی میلان کو ظاہر کرتا ہے۔

5۔ حسابی اوسط اعداد وشمار کی نمائندہ قیمتوں میں سے ایک ہے۔

6۔ بہتاتیہ، اعداد وشمار کی نمائندہ قیمتوں یا مرکزی میلان کی ہی ایک اور قسم ہے۔ مشاہدوں کے مجموعہ کا بہتاتیہ وہ مشاہدہ ہوتا ہے جو سب سے زیادہ بار آئے۔

7۔ وسطانیہ بھی نمائندہ قیمتوں کی ایک قسم ہے۔ یہ اعداد وشمار کے درمیان میں واقع قیمت کو ظاہر کرتا ہے آدھے مشاہدے اس سے اوپر ہوتے ہیں اور آدھے نیچے ہوتے ہیں۔

8۔ بار گراف برابر چوڑائی کے بار کی مدد سے اعداد کو ظاہر کرنے کا ایک طریقہ ہے۔

9۔ دوہرا بار گراف اعداد وشمار کے دو مجموعوں کو ایک نظر میں موازنہ کرنے کا ایک آسان طریقہ ہے۔

10۔ ہماری روزمرہ کی زندگی میں اکثر ایسے حالات پیش آتے ہیں جن میں کچھ کا ہونا یقینی ہے، کچھ کا ناممکن ہے اور کچھ ہو بھی سکتی ہیں اور نہیں بھی، یعنی دونوں امکانات ہیں۔ ایک ایسی حالت جو ہو بھی سکتی ہیں اور نہیں بھی، یہ ہونے کا بس ایک امکان ہے۔

© NCERT not to be republished