$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) تماثلہ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ سے،ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

اس لیے،
$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

متبادل کے طور پر، $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$

$\cos x = t$ رکھیے تا کہ $-\sin x\, dx = dt$ ہو

اس لیے
$$\int \sin^3 x\, dx = -\int \left(1-t^2\right) dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

ریمارک (Remark) ٹرگنومیٹریائی اکائیوں کا استعمال کر کے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ دونوں جوابات برابر ہیں۔

مشق 7.3

مشق 1 سے 22 میں تفاعلات کے تکملے دریافت کیجیے:

1. $\sin^2(2x+5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3(2x+1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

13. $\dfrac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$ 14. $\dfrac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$ 15. $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\tan^4 x$ 17. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ 18. $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ 20. $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$ 21. $\sin^{-1}(\cos x)$

22. $\dfrac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

سوال 23 اور 24 میں صحیح جواب کا انتخاب کیجیے

23۔ $\int \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ برابر ہے

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

24۔ $\int \dfrac{e^x (1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ برابر ہے

(A) $-\cot(ex^x) + C$ (B) $\tan(xe^x) + C$

(C) $\tan(e^x) + C$ (D) $\cot(e^x) + C$

7.4 کچھ مخصوص تفاعلات کے تکملہ (Integrals of Some Particular Functions)

اس سیکشن میں ہم نیچے تکملوں کے کچھ ضروری فارمولے بتائیں گے اور انھیں بہت سے دوسرے تعلق رکھنے والے معیاری تکملوں پر تکمل معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں گے۔

(1) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

(2) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

(3) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

اب ہم مندرجہ بالا نتائج کو ثابت کریں گے:

(1) ہمارے پاس ہے $\displaystyle\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

اس لیے $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(2) مندرجہ بالا (1) کے حوالے سے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

اس لیے، $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\log|a-x| + \log|a+x|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

نوٹ (1) میں استعمال کی گئی تکنیک کی سیکشن 7.5 میں وضاحت کی جائے گی۔

(3) $x = a\tan\theta$ رکھیے۔ تب $dx = a\sec^2\theta\, d\theta.$

اس لیے، $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{a \sec^2\theta \, d\theta}{a^2 \tan^2\theta + a^2}$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(4) مان لیجیے $x = a\sec\theta$ ہے۔ تب $dx = a\sec\theta\tan\theta \, d\theta$

اس لیے، $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}$

$$= \int \sec\theta \, d\theta = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$= \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$ ، جہاں $C = C_1 - \log|a|$

(5) مان لیجیے $x = a\sin\theta$ ہے۔ تب $dx = a\cos\theta \, d\theta$ ہے۔

اس لیے، $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}}$

$$= \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(6) مان لیجیے $x = a\tan\theta$ ہے۔ تب $dx = a\sec^2\theta \, d\theta$

اس لیے، $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}}$

$$= \int \sec\theta \, d\theta = \log\left|(\sec\theta + \tan\theta)\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C \text{، جہاں } C = C_1 - \log|a|$$

ان بنیادی فارمولوں کو استعمال کر کے، اب ہم کچھ اور فارمولے حاصل کرتے ہیں جو کہ استعمال کے نقطۂ نظر سے بہت مفید ہیں اور انھیں تکملوں کو دریافت کرنے میں براہ راست استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(7) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے، ہم لکھتے ہیں

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

اب $x + \frac{b}{2a} = t$ رکھیے تاکہ $dx = dt$ ہو اور $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$ لکھنے پر، ہم دیکھتے ہیں کہ تکملہ $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$ صورت میں چھوٹا ہو گیا ہے جو کہ $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$ کے نشان پر مبنی ہے اور اس لیے اسے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ کی قسم کا تکملہ دریافت کرنے کے لیے، ایسا ہی کیجیے جیسا کہ (7) میں کیا گیا ہے، ہمیں بنیادی تکملہ فارمولے استعمال کر کے حاصل ہوتا ہے۔

(9) $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}\,dx$، جہاں p, q, a, b, c مستقلہ ہیں، کسی قسم کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں حقیقی اعداد A اور B معلوم کرتے ہیں تاکہ

$$px + q = A\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B = A(2ax + b) + B$$

A اور B معلوم کرنے کے لیے ہم دونوں طرف x کے ضریب اور مستقل ارکان کی برابری کرتے ہیں۔ اس طرح A اور B معلوم ہو جاتے ہیں اور ایسے تکملہ ایک جانی پہچانی صورت میں چھوٹا ہو جاتا ہے۔

(10) $\int \frac{(px + q)\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ کی قسم کے تکملہ کی تحسیب کرنے کے لیے ہم (9) کی طرح آگے بڑھتے ہیں اور پھر تکملہ کو اس بنیادی صورت میں لکھتے ہیں۔

ہم مندرجہ بالا طریقوں کو کچھ مثالوں کے ذریعے سمجھاتے ہیں۔

مثال 8: درج ذیل تکملے دریافت کیجیے:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

حل: ہمارے پاس ہے

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$ [7.4(1) سے]

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ (ii)

$x-1=t$ رکھیے۔ تب $dx=dt$

اس لیے، $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t) + C$ [7.4(5) سے]

$$= \sin^{-1}(x-1) + C$$

مثال 9: درج ذیل تکملے دریافت کیجیے:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

حل: (i) ہمارے پاس ہے

$$x^2-6x+13 = x^2-6x+3^2-3^2+13 = (x-3)^2+4$$

اس طرح $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}\,dx$

مان لیجیے $x-3=t$۔ تب $dx=dt$

اس لیے، $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + C$ [7.4 (3) سے]

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C$$

(ii) درج تکملہ 7.4(7) کی صورت کا ہے۔ ہم تکمل کا نسب نما اس طرح لکھتے ہیں،

$$3x^2+13x-10 = 3\left(x^2+\frac{13x}{3}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2\right]$$ (مربع مکمل کرنے پر)

اس طرح $$\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$x+\frac{13}{6} = t$ رکھیے۔ تب $dx=dt$

اس لیے، $$\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3\times 2\times \frac{17}{6}} \log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right| + C_1$$ [7.4(i) سے]

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C$$ ، جہاں $C = C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$ ہے

(iii) ہمارے پاس ہے $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$ (مربع مکمل کرنے پر)

$x-\frac{1}{5} = t$ رکھیے۔ تب $dx=dt$

اس لیے
$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + C \quad [7.4(4)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}} \right| + C$$

مثال10: درج ذیل تکملے دریافت کیجیے

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\, dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}}\, dx$

حل:

(i) 7.4(9) فارمولے کا استعمال کر کے، ہم یوں ظاہر کریں گے

$$x+2 = A\frac{d}{dx}\left(2x^2+6x+5\right) + B = A\,(4x+6) + B$$

دونوں طرف سے x کے ضریب اور مستقل ارکان کو برابر رکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$4A = 1$ اور $6A + B = 2$ یا $A = \frac{1}{4}$ اور $B = \frac{1}{2}$

اس لیے،
$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \text{ (مان لیجیے)} \qquad ...(1)$$

میں $2x^2 + 6x + 5 = t$ رکھیے، تاکہ $(4x + 6)\, dx = dt$

اس لیے،
$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1$$

$$= \log|2x^2+6x+5| + C_1 \qquad ...(2)$$

اور
$$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$x + \frac{3}{2} = t$ رکھیے، تا کہ $dx=dt$، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \tan^{-1} 2t + \mathrm{C}_2 \qquad [7.4(3) \text{ سے}]$$

$$= \tan^{-1} 2\left(x + \frac{3}{2}\right) + \mathrm{C}_2 = \tan^{-1}(2x+3) + \mathrm{C}_2 \qquad ...(3)$$

(2)اور(3) کا استعمال(1) میں کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\, dx = \frac{1}{4} \log\left|2x^2+6x+5\right| + \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+3) + \mathrm{C}$$

جہاں، $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1}{4} + \frac{\mathrm{C}_2}{2}$ ہے

(ii) یہ تکملہ 7.4(10) میں دی گئی صورت میں ہم اسے اس طرح ظاہر کرتے ہیں

$$x+3 = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(5-4x-x^2) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(-4-2x) + \mathrm{B}$$

دونوں طرف x کے ضریب اور مستقل ارکان کو برابر رکھنے پر ہم دیکھتے ہیں

$-2\mathrm{A}=1$ اور $-4\mathrm{A} + \mathrm{B} = 3$، یعنی $\mathrm{A} = -\frac{1}{2}$ اور $\mathrm{B} = 1$

اس لیے، $$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-4-2x)\, dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \qquad ...(1)$$

I_1 میں $5-4x-x^2 = t$ رکھیے، تا کہ $(-4-2x)\, dx = dt$

اس لیے، $$\mathrm{I}_1 = \int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad 2\sqrt{t} + \mathrm{C}_1$$

$$= 2\sqrt{5-4x-x^2} + \mathrm{C}_1 \qquad ...(2)$$

اب غور کیجیے $\displaystyle I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$

$x+2=t$ رکھیے، تا کہ $dx=dt$

اس لیے، $\displaystyle I_2=\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\sin^{-1}\frac{t}{3}+C_2$ [7.4(5) سے]

$$=\sin^{-1}\frac{x+2}{3}+C_2 \qquad ...(3)$$

(2) اور (3) کو (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\displaystyle\int\frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}=-\sqrt{5-4x-x^2}+\sin^{-1}\frac{x+2}{3}+C$، جہاں، $C=C_2-\dfrac{C_1}{2}$

مشق 7.4

مشق 1 سے 23 کے تفاعلات کے تکملے کیجیے

1. $\dfrac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\dfrac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\dfrac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\dfrac{x^2}{1-x^6}$

7. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\dfrac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\dfrac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\dfrac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\dfrac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\dfrac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\dfrac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\dfrac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

مشق 24 اور 25 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے:

24۔ $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ برابر ہے

(A) $x \tan^{-1}(x+1) + C$ (B) $\tan^{-1}(x+1) + C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x + C$ (D) $\tan^{-1}x + C$

25۔ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ برابر ہے

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 جزوی کسروں کے ذریعے تکمل (Integration by Partial Fractions)

یاد کیجیے کہ ناطق تفاعل کو دو کثیر رکنیوں کی نسبت کے طور پر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل میں بیان کیا گیا ہے جہاں $P(x)$ اور $Q(x)$، x میں کثیر رکنیاں ہیں اور $Q(x) \neq 0$۔ اگر $P(x)$ کا درجہ $Q(x)$ کے درجہ سے کم ہے، تب ناطق فنکشن واجب کہلاتا ہے، ورنہ، یہ غیر واجب کہلاتا ہے۔ غیر واجب ناطق فاعل کو واجب ناطق فاعل میں لمبی تقسیم کے عمل سے تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے، اگر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ غیر واجب ہے، تب $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$، جہاں $T(x)$، x میں کثیر رکنی ہے اور $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ کثیر رکنی کا کس طرح تکمل کرتے ہیں، کسی بھی ناطق تفاعل کا تکمل ایک واجب ناطق تفاعل کے تکمل میں تحویل ہو جاتا ہے۔ وہ ناطق تفاعل جن کا ہم تکمل کے لیے غور کریں گے، وہ ہوں گے جن کے نسب نما کو خطی اور دو رکنی اجزائے ضربی میں توڑا جا سکے۔ مان لیجیے کہ ہم $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ کی قدر کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں جہاں $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ یہ ہمیشہ ممکن ہے تکمل کو آسان ناطق تفاعلات کے حاصل جمع کے طور پر ایک طریقہ سے لکھنا جسے جزوی کسروں میں تحلیل کہتے ہیں ہمیشہ ممکن ہے۔ اس کے بعد تکمل کرنا پہلے سے جانے ہوئے طریقوں کے ذریعے آسان ہو جاتا ہے۔ ذیل جدول 7.2 میں آسان جزوی کسروں کی قسم کو ظاہر کیا گیا ہے جو کہ ناطق کسروں کی مختلف قسموں کے ساتھ جڑی ہوئی ہیں۔

جدول 7.2

شمار نمبر	ناطق تفاعل سے	جزوی کسر سے
1	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$
2	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$
3	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
4	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$
5	$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$ جہاں x^2+bx+c کے مزید اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$

مندرجہ بالا جدول میں، B,A اور C میں حقیقی اعداد ہیں جنھیں موزوں انداز میں دریافت کرنا ہے۔

مثال 11 $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ دریافت کیجیے

حل تکمل ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ اس لیے [جدول (i) 7.2] میں دی ہو جزوی کسر کی صورت استعمال کر کے ہم لکھتے ہیں

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \quad ...(1)$$

جہاں حقیقی اعداد A اور B موزوں انداز میں معلوم کرنے ہیں۔ یہ دیتا ہے

$$1 = A(x+2)+B(x+1)$$

x کے ضریب اور مستقل رکن کو برابر کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$A+B=0$$

اور $2A+B=1$

ان مساوات کو حل کرنے پر، ہمیں $A=1$ اور $B=-1$ حاصل ہوتا ہے

اس طرح، تکمل اس سے دیا گیا ہے

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}$$

اس لیے،

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + C$$

$$= \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

ریمارک (Remark) اوپر مساوات (1) ایک اکائی ہے، یعنی یہ بیان x کی تمام (ممکن) قدروں کے لیے درست ہے۔ کچھ مصنف '≡' علامت کا استعمال یہ دکھانے کے لیے کرتے ہیں کہ یہ بیان ایک اکائی ہے اور علامت '=' کا استعمال یہ دکھانے کے لیے کرتے ہیں کہ یہ بیان ایک مساوات ہے، یعنی یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ بیان x کی صرف کچھ قدروں کے لیے درست ہے۔

مثال 12: $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$ دریافت کیجیے

حل: یہاں تکمل $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ ایک مناسب ناطق تفاعل نہیں ہے، اس لیے ہم x^2+1 کو x^2-5x+6 سے تقسیم کرتے ہیں اور دریافت کرتے ہیں

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}$$

مان لیجیے

$$\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

تاکہ

$$5x-5 = A(x-3) + B(x-2)$$

دونوں طرف x کے ضریب اور مستقل ارکان کو برابر رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $A+B=5$ اور $3A+2B=5$– ان مساواتوں کو حل کرنے پر، ہمیں $A=-5$ اور $B=10$ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح،

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

اس لیے، $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$

$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + C.$

مثال 13: $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}\,dx$ معلوم کیجیے

حل: تکمل جدول 7.2(4) میں د گئے نمونے کی طرح کا ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

تاکہ $3x-2 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2$

$$= A(x^2+4x+3) + B(x+3) + C(x^2+2x+1)$$

x^2، x اور مستقل ارکان کے ضریب کا دونوں طرف موازنہ کرنے پر، ہمیں $A + C = 0$، $4A + B + 2C = 3$ اور $3A + 3B + C = -2$ حاصل ہوتا ہے۔ ان مساوات کو حل کرنے پر، ہمیں $A = \frac{1}{11}$، $B = \frac{-5}{2}$ اور $C = \frac{-11}{4}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے تکمل اس طرح دیا گیا ہے

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

اس لیے، $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

مثال 14: $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ معلوم کیجیے

حل: $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ پر غور کیجیے اور $x^2 = y$ رکھیے

تب $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$$ لکھیے

تا کہ $y = A(y+4) + B(y+1)$

دونوں طرف y اور مستقل ارکان کے ضریب کا موازنہ کرنے پر، ہمیں A+B=1 اور 4A+B=0 حاصل ہوتا ہے، جو دیتا ہے

$$A = -\frac{1}{3} \text{ اور } B = \frac{4}{3}$$

اس طرح،
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

اس لیے
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

مندرجہ بالا کی مثال میں، بدل صرف جزوی کسر والے حصہ کے لیے کی گئی ہے نا کہ تکملی حصہ کے لیے۔ اب ہم ایک مثال پر غور کرتے ہیں، جہاں تکمل میں بدل کا طریقہ اور جزوی کسر طریقہ کا اجماع ہے۔

مثال 15: $\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$ معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $y = \sin\phi$

تب $dy = \cos\phi\, d\phi$

اس لیے،
$$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y-2)\,dy}{5-(1-y^2)-4y}$$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\, dy$$

$$= \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = I \quad \text{(مان لیجیے)}$$

اب ہم لکھتے ہیں
$$\frac{3y-2}{(y-2)^2} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{(y-2)^2}$$ [جدول 7.2(2) سے]

اس لیے، $$3y-2=A(y-2)+B$$

y اور مستقل ارکان کے ضریب کا موازنہ کرنے پر، ہمیں $A=3$ اور $B-2A=-2$ حاصل ہوتا ہے، جو $A=3$ اور $B=4$ دیتا ہے۔

اس لیے، مطلوبہ تکمل اس طرح دیا گیا ہے

$$I=\int\left[\frac{3}{y-2}+\frac{4}{(y-2)^2}\right]dy=3\int\frac{dy}{y-2}+4\int\frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$=3\log|y-2|+4\left(-\frac{1}{y-2}\right)+C$$

$$=3\log|\sin\phi-2|+\frac{4}{2-\sin\phi}+C$$

$$=3\log(2-\sin\phi)+\frac{4}{2-\sin\phi}+C$$ (کیونکہ $2-\sin\phi$ ہمیشہ مثبت ہے)

مثال 16: $\int\frac{x^2+x+1\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ دریافت کیجیے

حل: تکمل ایک واجب ناطق تفاعل ہے۔ ناطق تفاعل کو جزوی کسر میں تحلیل کیجیے (جدول [2.2(5)]) لکھیے۔

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

اس لیے، $$x^2+x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)$$

x^2، x اور مستقل ارکان کے ضریبوں کا دونوں طرف موازنہ کرنے پر، ہمیں $A+B=1$، $2B+C=1$ اور $A+2C=1$ حاصل ہوتا ہے۔ ان مساوات کو حل کرنے پر ہمیں، $A=\frac{3}{5}$، $B=\frac{2}{5}$ اور $C=\frac{1}{5}$ حاصل ہوتا ہے

اس طرح، تکمل اس سے دیا گیا ہے

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}=\frac{3}{5(x+2)}+\frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}=\frac{3}{5(x+2)}+\frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

اس لیے، $$\int\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx=\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{3}{5}\log|x+2|+\frac{1}{5}\log|x^2+1|+\frac{1}{5}\tan^{-1}x+C$$

مشق 7.5

سوال 1 تا 21 میں ناطق تفاعلات کا تکمل کیجیے۔

1. $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$
2. $\dfrac{1}{x^2-9}$
3. $\dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
4. $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
5. $\dfrac{2x}{x^2+3x+2}$
6. $\dfrac{1-x^2}{x(1-2x)}$
7. $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$
8. $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$
9. $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$
10. $\dfrac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$
11. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$
12. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$
13. $\dfrac{2}{(1-x)(1+x^2)}$
14. $\dfrac{3x-1}{(x+2)^2}$
15. $\dfrac{1}{x^4-1}$

16۔ $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$ [اشارہ شمار کنندہ اور نسب نما کو x^{n-1} سے ضرب کیجیے اور $x^n = t$ رکھیے]

17۔ $\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [اشارہ Sinx=t رکھیے]

18. $\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$
19. $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$
20. $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

21۔ $\dfrac{1}{(e^x-1)}$ [اشارہ: $e^x = t$ رکھیے]

مشق 22 سے 23 میں ہر ایک کے صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

22۔ $\int \dfrac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ برابر ہے

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right| + C$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right| + C$ (D) $\log\left|(x-1)(x-2)\right| + C$

23۔ $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$ برابر ہے

(A) $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (B) $\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

(C) $-\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ (D) $\frac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + C$

7.6 بالحصص تکمل (Integration by Parts)

اس سیکشن میں، ہم تکمل کا ایک اور طریقہ بیان کریں گے، جو کہ تفاعلات کی تکملی ضرب میں بہت زیادہ مفید ثابت ہوا ہے۔

اگر u اور v ایک واحد متغیر x (مان لیجیے) کہ دو تفرق پذیر تفاعل ہیں۔ تب تفرق کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

دونوں طرف کا تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

یا

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad (1)...$$

مان لیجیے $u=f(x)$ اور $\frac{dv}{dx} = g(x)$ ہے۔ تب

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ اور } v = \int g(x)\,dx$$

اس لیے، عبارت (1) اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int [\int g(x)\,dx]\,f'(x)\,dx$$

یعنی،

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int [f'(x)\int g(x)\,dx]\,dx$$

اگر ہم f کو پہلے تفاعل اور g کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں، تب یہ ضابطہ درج ذیل کی طرح بیان کیا جا سکتا ہے:

''دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل = (پہلا تفاعل) × دوسرے تفاعل کا تکمل) تکمل [(پہلے فنکشن کا تفرقی ضریب) × دوسرے فنکشن کا تکمل)]

مثال 17: $\int x\cos x\,dx$ دریافت کیجیے

حل: $f(x)=x$ (پہلا تفاعل) رکھیے اور $g(x) = \cos x$ (دوسرا تفاعل) رکھیے

تب، اجزا تکمل بالحصص سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int x \cos x \, dx = x \int \cos x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x) \int \cos x \, dx\right] dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

مان لیجیے، ہم $f(x) = \cos x$ اور $g(x) = x$ لیتے ہیں

تب $$\int x \cos x \, dx = \cos x \int x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\cos x) \int x \, dx\right] dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int \sin x \frac{x^2}{2} dx$$

اس طرح، یہ دکھاتا ہے کہ تکمل $\int x \cos x \, dx$ کی تحویل اور زیادہ پیچیدہ تکملے میں ہو جاتی ہے جس میں x کی اور زیادہ طاقت ہے۔ اس لیے، پہلے اور دوسرے فنکشن کا واجب چننا بہت اہم ہے۔

ریمارک (Remark)

(i) یہ ظاہر کرنا بیش قیمتی ہے کہ تکمل بالحصص کرنا تفاعل کے تمام حاصل ضرب کے معاملوں میں ممکن نہیں ہے۔ مثال کے طور پر یہ طریقہ $\int \sqrt{x} \sin x \, dx$ میں کار آمد نہیں ہے۔ اس کی وجہ ہے کہ کوئی تفاعل ایسا موجود نہیں ہے جس کا مشتق $\sqrt{x} \sin x$ ہے۔

(ii) یہ مشاہدہ کیجیے کہ جب ہم دوسرے تفاعل کا تکملہ دریافت کرتے ہیں تو کوئی تکمل کا مستقلہ نہیں لیتے ہیں۔ اگر ہم دوسرے تفاعل $\cos x$ کا تکملہ ایسے لکھیں جو کہ $\sin x + K$ ہے، جہاں K کوئی مستقلہ ہے، تب

$$\int x \cos x \, dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k) \, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \int \sin x \, dx - \int k \, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \cos x - kx + C = x \sin x + \cos x + C$$

یہ، یہ دکھاتا ہے کہ دوسرے تفاعل کے تکملہ میں ایک مستقلہ جوڑنے پر یہ فالتو ہے، جیسا کہ آخری نتیجہ سے متعلق ہے جب کہ تکمل کو کرنے کے لیے اجزا کے طریقے کا استعمال کیا گیا ہے۔

(iii) عام طور پر، اگر کوئی تفاعل x قوت کا ہے یا x میں کثیر رکنی ہے، تب ہم اسے پہلے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔ حالانکہ ان معاملوں میں جہاں دوسرے تفاعل معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعل ہے یا لوگارتمی تفاعل ہے، تب ہم انھیں پہلے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔

مثال 18: $\int \log x \, dx$ معلوم کیجیے۔

حل: اس کے شروع کرنے میں ہم یہ اندازہ لگانے میں قاصر ہیں جس کا مشتق log x ہے۔ ہم log x کو پہلے تفاعل اور مستقل تفاعل '1' کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔ تب دوسرے تفاعل کا تکمل x ہے۔

اس طرح،
$$\int(\log x.1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\log x)\int 1\, dx\right] dx$$
$$=(\log x)\cdot x - \int\frac{1}{x}\, x\, dx = x\log x - x + C$$

مثال 19: $\int x\, e^x dx$ معلوم کیجیے

حل: x کو پہلے اور e^x کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیجیے۔ دوسرے تفاعل کا تکملہ e^x ہے۔

اس لیے،
$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

مثال 20: $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $\sin^{-1}x$ پہلا تفاعل ہے اور $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ دوسرا تفاعل ہے۔

ہم پہلے دوسرے تفاعل کا تکملہ معلوم کریں گے، یعنی؛ $\int\frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ کا

$t = 1-x^2$ لیجیے۔ تب $dt = -2x\, dx$

اس لیے،
$$\int\frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

اس طرح،
$$\int\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = (\sin^{-1}x)\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x + x + C = x - \sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x + C$$

متبادل کے طور پر، یہ تکملہ قائم مقامی کے طریقہ سے بھی معلوم کیا جا سکتا ہے جہاں $\sin^{-1}x = \theta$ ہے۔ اور پھر تکمل بالحصص کرنے پر۔

مثال 21: $\int e^x \sin x\, dx$ معلوم کیجیے

حل: e^x کو پہلا تفاعل لیجیے اور $\sin x$ کو دوسرا تفاعل۔ تب، تکمل بالحصص کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \int e^x \sin x\, dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + I_1 \text{ (مان لیجیے)} \qquad \ldots(1)$$

e^x اور $\cos x$ کو بالترتیب I_1 میں پہلا اور دوسرا تفاعل لینے پر I_1 ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

I_1 کی قدر (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \text{ یا } 2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

اس طرح، $I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

متبادل کے طور پر، درج بالا تکملہ کو Sinx کو پہلا تفاعل اور e^x کو دوسرا تفاعل لے کر بھی حل کیا جا سکتا ہے۔

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$ کی طرح کا تکملہ

ہمارے پاس ہے $I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$

$$= I_1 + \int e^x f'(x)\, dx \text{، جہاں } I_1 = \int e^x f(x)\, dx \text{ ہے} \qquad \ldots(1)$$

$f(x)$ اور e^x کو بالترتیب (I) میں پہلا اور دوسرا تفاعل لینے پر اور تکمل بالحصص کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$I_1 = f(x)\, e^x - \int f'(x)\, e^x dx + C$$

I_1 کو (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + C = e^x f(x) + C$$

اس طرح، $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + C$

مثال22: معلوم کیجیے (i) $\int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$

حل:

(i) ہمارے پاس ہے $I = \int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

$f(x) = \tan^{-1}x$ پر غور کیجیے، تب $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ہے

اس طرح، دیا ہوا تکملہ $e^x\ [f(x) + f'(x)]$ کی قسم کا ہے

اس لیے، $I = \int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx = e^x \tan^{-1}x + C$

(ii) ہمارے پاس ہے $I = \int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2} dx = \int e^x\, [\frac{x^2-1+1+1)}{(x+1)^2}]\, dx$

$$= \int e^x\, [\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx = \int e^x\, [\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx$$

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ پر غور کیجیے، تب $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

اس طرح، دیا ہوا تکملہ $e^x\ [f(x) + f'(x)]$ کی طرح کا ہے

اس لیے $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\, dx = \frac{x-1}{x+1} e^x + C$

مشق 7.6

مشق 1 تا 22 میں تفاعلات کا تکملہ کیجیے۔

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2\, e^x$ **4.** $x \log x$

5. $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$ **7.** $x \sin^{-1}x$ **8.** $x \tan^{-1}x$

9. $x \cos^{-1}x$ **10.** $(\sin^{-1}x)^2$ **11.** $\frac{x \cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x \sec^2 x$

13. $\tan^{-1}x$ **14.** $x (\log x)^2$ **15.** $(x^2+1) \log x$

16. $e^x(\sin x+\cos x)$ **17.** $\dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)\,e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x}\,\sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

سوال 23 اور 24 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

23۔ $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ برابر ہے

(A) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ (B) $\frac{1}{3}e^{x^2}+C$

(C) $\frac{1}{2}e^{x^3}+C$ (D) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

24۔ $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ برابر ہے

(A) $e^x\cos x + C$ (B) $e^x \sec x + C$

(C) $e^x \sin x + C$ (D) ex tan x + C

7.6.2 کچھ اور قسم کے تکملے (Integrals of some more types)

یہاں، ہم کچھ خاص طریقوں کے معیاری تکملوں پر بحث کریں گے۔ جو تکمل بالحصص کی تکنینک پر مبنی ہیں:

(i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) مان لیجیے $I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

مستقل فنکشن 1 کو دوسرا فنکشن لینے پر اور اجزا کے ذریعہ تکمل کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \text{I} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

یا
$$2\text{I} = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

یا
$$\mathbf{I} = \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \text{C}$$

اسی طرح، دوسرے دو تکملوں کا اجزا کے ذریعے تکمل کرنے پر، مستقل تفاعل '1' کو دوسرے تفاعل کے طور پر لینے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

(ii) $$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + \text{C}$$

(iii) $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \text{C}$$

متبادل کے طور پر، تکملے (i)، (ii) اور (iii) ٹرگنومیٹریائی تعمل البدل کے ذریعے بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ جیسے $x=a\sec\theta$ کو (i) میں رکھنے پر، $x=a\tan\theta$ کو (ii) میں رکھنے پر اور $x=a\sin\theta$ کو بالترتیب (iii) میں رکھنے پر

مثال 23: $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$ معلوم کیجیے

حل: نوٹ کر لیجیے کہ

$$\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int\sqrt{(x+1)^2+4}\,dx$$

$x+1=y$ رکھیے، تا کہ $dx=dy$ ہو۔ تب

$$\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int\sqrt{y^2+2^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{y^2+4} + \frac{4}{2}\log\left|y+\sqrt{y^2+4}\right| + \text{C}$$ [7.6.2(ii) کا استعمال کرنے پر]

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + \text{C}$$

مثال 24: $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ معلوم کیجیے

حل: نوٹ کر لیجیے کہ $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$

$x+1=y$ رکھیے، تا کہ $dx=dy$ ہو

اس طرح $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{4-y^2}\,dy$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2} + C$$ (7.6.2(iii) کا استعمال کرنے پر)

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

مشق 7.7

مشتق 1 تا 9 میں تفاعلات کا تکمل معلوم کیجیے۔

1. $\sqrt{4-x^2}$
2. $\sqrt{1-4x^2}$
3. $\sqrt{x^2+4x+6}$
4. $\sqrt{x^2+4x+1}$
5. $\sqrt{1-4x-x^2}$
6. $\sqrt{x^2+4x-5}$
7. $\sqrt{1+3x-x^2}$
8. $\sqrt{x^2+3x}$
9. $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

سوال 10 تا 11 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

10۔ $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ برابر ہے

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$

(B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(C) $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

11۔ $\int\sqrt{x^2-8x+7}\,dx$ برابر ہے

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - 3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

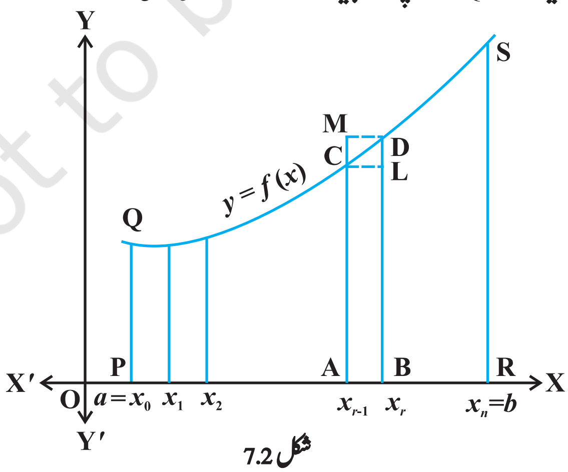
7.7 معین تکملہ (Definite Integral)

پچھلے سیکشن میں ہم نے لامحدود تکملوں کے بارے میں پڑھا ہے اور ان کو معلوم کرنے کے چند طریقوں کے بارے میں بحث کی ہے جس میں کچھ مخصوص تفاعل بھی شامل ہیں۔ اس سیکشن میں ہم معین تکملے کے تفاعل کا مطالعہ کریں گے۔ معین تکملے کی ایک واحد قدر ہوتی ہے۔ ایک معین تکملہ کو $\int_a^b f(x)\,dx$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں a تکملے کی زیریں اور b بالائی ہوتی ہے۔ معین تکملے کا تعارف یا تو انتہا کے مجموعہ کے طور پر کیا جاتا ہے یا یہ ایک مخالف تفرق F وقفہ $[a,b]$ میں رکھتا ہے، تب اس کی قدر F کی قدروں کے انتہائی نقاط پر، یعنی، $F(b) - F(a)$ کے فرق کے درمیان ہے۔ یہاں ہم، ان دونوں حالتوں پر غور کریں گے جیسا کہ ذیل میں بحث کی گئی ہے:

7.7.1 معین تکملہ ایک حاصل جمع کی انتہا کے طور پر (Definite integral as the limit of a sum)

مان لیجیے بند وقفہ (a,b) پر f ایک مسلسل تفاعل ہے۔ یہ مان لیجیے کہ تفاعل کے ذریعہ لی گئی تمام قدریں منفی ہیں، تا کہ تفاعل کا گراف x– محور کے اوپر ایک منحنی ہے۔

معین تکملہ $\int_a^b f(x)\,dx$ منحنی $y=f(x)$ طولی مختص $x=a$، $x=b$ اور x– محور سے گھرے ہوئے علاقہ کا رقبہ ہے۔ اس رقبہ کی قدر کا اندازہ لگانے کے لیے، حلقہ PRSQP پر غور کیجیے جو کہ x– محور اور طولی مختص $x=a$ اور $x=b$ کے درمیان ہے (شکل 7.2)



شکل 7.2

وقفہ $[a,b]$ کو n برابر کے ماتحت وقفوں میں بانٹیے جو کہ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{r-1}, x_r], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ سے ظاہر کیے گئے ہیں اور جہاں $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h, \ldots, x_r = a+rh$ اور $x_n = b = a + nh$ یا $n = \dfrac{b-a}{h}\cdot$ ہے۔ ہم نوٹ کرتے ہیں کہ جس طرح $n \to \infty$ ویسے ہی $h \to 0$ ہے۔

حلقہ PRSQP جس پر غور کیا جا رہا ہے n ماتحت حلقوں کا حاصل جمع ہے، جہاں ہر ایک ماتحت حلقہ، ماتحت وقفوں $[x_{r-1}, x_r], r = 1, 2, 3, , n$ پر بیان کیا گیا ہے۔

شکل 7.2 سے ہمارے پاس ہے

مستطیل (ABDM) کا رقبہ علاقہ > (ABDCA) کا رقبہ مستطیل > (ABCL) کا رقبہ ...(1)

شدت کے ساتھ جس طرح $x_r - x_{r-1} \to 0$ (1)، یعنی، $h \to 0$ میں دکھائے گئے تینوں رقبہ تقریباً ایک دوسرے کے برابر ہو جاتے ہیں۔ اب ہم درج ذیل حاصل جمع معلوم کرتے ہیں۔

$$s_n = h\,[f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})] = h\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) \qquad ...(2)$$

$$s_n = h\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = h\sum_{r=1}^{n} f(x_r) \quad \text{اور} \qquad ...(3)$$

یہاں s_n اور S_n بالترتیب ذیلی مستطیلوں اور درج بالا مستطیلوں کے رقبوں کا حاصل جمع ظاہر کرتے ہیں۔ جو کہ ماتحت وقفوں $r = 1, 2, 3, n$ ، $[x_{r-1}, x_r]$ کے اوپر ہے۔

ایک اختیاری ماتحت وقفہ $[x_{r-1}, x_r]$ کے لیے نامساوات (1) کو مدنظر رکھتے ہوئے ہمارے پاس ہے

$$s_n < \text{حلقہ PRSQP کا رقبہ} < S_n \qquad ...(4)$$

جیسے جیسے $n \to \infty$ ، پٹیاں قریب ہوتی جاتی ہیں، یہ مان لیا گیا ہے کہ (2) اور (3) کی انتہائی قدریں دونوں حالت میں یکساں ہیں اور مشترک انتہائی قدر منحنی کے زیر سایے مطلوبہ رقبہ ہے۔

علامتی طور پر، ہم لکھتے ہیں

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{حلقہ PRSQP کا رقبہ} = \int_a^b f(x)dx \qquad (5)\ ...$$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہ رقبہ دوسرے کسی بھی رقبہ کی انتہائی قدر ہے جو کہ مستطیل کی منحنی سطح کے نیچے اور مستطیل کی منحنی

سطح کے اوپر ہے۔آسانی کے لیے،ہم مستطیلوں کی اونچائی منحنی کی اونچائی کے برابر لیں گے جو کہ ہر ایک ماتحت وقفہ کی بائیں ہاتھ کے کنارے کی طرف ہوگا۔اس لیے ہم (5) کو اس طرح لکھتے ہیں

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a)+f(a+h)+...+f(a+(n-1)\,h]$$

یا

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+...+f(a+(n-1)\,h] \quad ...(6)$$

جہاں $h=\frac{b-a}{n}\to 0$ کیونکہ $n\to\infty$

اوپر کی عبارت (6) معین تکملے کی تعریف،انتہائی کے حاصل جمع کے طور پر جانی جاتی ہے۔

ریمارک (Remark):ایک تفاعل کے محدود تکملے کی قدر کسی بھی خاص وقفہ پر اس تفاعل کے تکملے پر منحصر ہوتی ہے،لیکن تکمل کے متغیر کے اوپر نہیں تا کہ ہم لا محدود متغیر کو ظاہر کرنے کے لیے چن سکیں۔اگر لا محدود متغیر کو x کے بجائے t یا u سے ظاہر کیا جائے تو ہم آسانی کے لیے تکملے کو $\int_a^b f(x)\,dx$ کے بجائے $\int_a^b f(t)\,dt$ یا $\int_a^b f(u)\,du$ کو لکھتے ہیں۔اس لیے، تکمل کا متغیر مصنوعی متغیر کہلاتا ہے۔

مثال 25: $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ کی انتہائی حاصل جمع کے طور معلوم کیجیے۔

حل: تعریف سے

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+...+f(a+(n-1)\,h],$$

جہاں $h=\frac{b-a}{n}$ ہے

اس مثال میں، $a=0$ ، $b=2$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $h=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$

اس لیے،

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(0)+f(\frac{2}{n})+f(\frac{4}{n})+...+f(\frac{2(n-1)}{n})]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+(\frac{2^2}{n^2}+1)+(\frac{4^2}{n^2}+1)+...+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{(1+1+...+1)}_{n\text{-terms}}\right]+\frac{1}{n^2}(2^2+4^2+...+(2n-2)^2]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{2^2}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{4}{n^2}\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{2}{3}\,\frac{(n-1)\;(2n-1)}{n}\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\;\left(2-\frac{1}{n}\right)\right] = 2\;\left[1+\frac{4}{3}\right] = \frac{14}{3}$$

مثال 26: $\int_0^2 e^x\, dx$ کی قیمت کا اندازہ انتہائی کے حاصل جمع کے طور پر معلوم کیجیے۔

حل: تعریف سے

$$\int_0^2 e^x\, dx = (2-0) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[e^0 + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + \ldots + e^{\frac{2n-2}{n}}\right]$$

G.P. کے n ارکان کے مجموعہ کا استعمال کرکے، جہاں $a = 1$ ، $r = e^{\frac{2}{n}}$ ہے۔ ہمارے پاس ہے

$$\int_0^2 e^x\, dx = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right] = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$= \frac{2\,(e^2-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\right]\cdot 2} = e^2-1$$

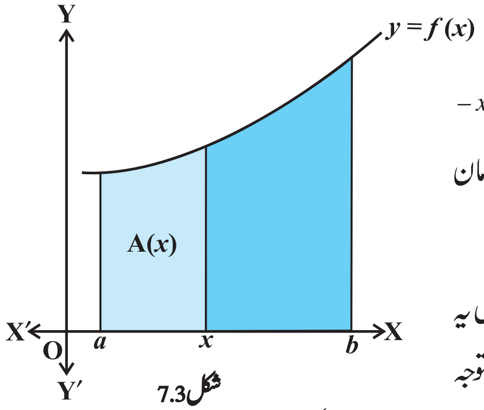
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(e^h-1)}{h} = 1$ کا استعمال کرنے پر

مشق 7.8

ذیل محدود تکملوں کی قدر کا اندازہ انتہا کے حاصل کے طور پر معلوم کیجیے۔

1. $\int_a^b x\, dx$
2. $\int_0^5 (x+1)\, dx$
3. $\int_2^3 x^2\, dx$
4. $\int_1^4 (x^2 - x)\, dx$
5. $\int_{-1}^1 e^x\, dx$
6. $\int_0^4 (x + e^{2x})\, dx$

7.8 احصا کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem of Calculus)



شکل 7.3

7.8.1 رقبہ تفاعل (Area Function)

ہم $\int_a^b f(n)\, dn$ کو منحنی $y=f(x)$ مختص $x=a$ اور $x=b$ اور x محور سے گھرے ہوئے علاقہ کے رقبہ کے طور پر بیان کر چکے ہیں، مان لیجیے $[a, b]$ میں ایک نقطہ x دیا ہوا ہے۔ تب شکل 7.3 میں دیے گئے شیڈ ڈ خطہ کے رقبہ کو ظاہر کرتا ہے۔[یہاں یہ مان لیا گیا ہے کہ $x \in [a, b]$ کے لیے $f(x) > 0$ ہے، نیچے جو توجہ دلائی گئی ہے وہ دوسرے تفاعل کے لیے بھی اسی طرح صحیح ہے]۔ اس شیڈ ڈ خطہ کا رقبہ x کی قدر پر مبنی ہے۔

دوسرے الفاظ میں، اس شیڈ ڈ خطہ کا رقبہ x کا تفاعل ہے۔ ہم x کے اس تفاعل $A(x)$ کو رقبہ تفاعل کے طور بیان کرتے ہیں ہم تفاعل $A(n)$ کو رقبہ تفاعل کہتے ہیں۔ جو اس طرح دیا گیا ہے

$$\mathbf{A}(x) = \int_a^x f(x)\, dx \qquad \ldots\ldots(1)$$

اس تعریف پر مبنی دو بنیادی مسئلے د گئے ہیں۔ حالانکہ، ہم ان کا صرف بیان دے رہے ہیں، کیونکہ ان کا ثبوت اس کتاب کی حد سے باہر ہے۔

7.8.2 تکملہ احصا کا پہلا بنیادی مسئلہ (First fundamental theorem of integral calculus)

مسئلہ 1 مان لیجیے بند وقفہ $[a,b]$ پر f ایک مسلسل تفاعل ہے اور مان لیجیے $A(x)$ رقبہ تفاعل ہے۔ تب تمام $x\in[a, b]$ کے لیے $A'(x)=f(x)$ ہے

7.8.3 تکملہ احصا کا دوسرا بنیادی مسئلہ (Second fundamental theorem of integral calculus)

ہم ذیل میں ایک اہم مسئلہ کو بیان کرتے ہیں جو ہمیں مخالف تفرق کا استعمال کر کے محدود تکملہ کی قدر کا اندازہ لگانے کے قابل بناتے ہیں۔

مسئلہ 2 مان لیجیے بند وقفہ $[a,b]$ پر f ایک مسلسل تفاعل ہے اور F، f کا ضد تفرق ہے۔ تب

$$\int_a^b f(x)\, dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

ریمارک (Remark)

(i) الفاظ میں، مسئلہ 2 ہمیں بتاتا ہے کہ $\int_a^b f(x)\,dx =$ (بالائی حد b پر f کے ضد مشتق F کی قدر۔ اسی ضد مشتق کی زیریں حد پر قدر)

(ii) یہ مسئلہ بہت زیادہ استعمال میں آنے والا ہے، کیونکہ یہ ہمیں بغیر انتہا کا حاصل جمع نکالے ہوئے معین تکملہ کو اور آسانی سے حل کرنے میں مدد کرتا ہے۔

(iii) ایک معین تکملہ کا حساب لگانے کے لیے فیصلہ کن عمل ہے جس میں ایک تفاعل معلوم کرنا ہے جس کا مشتق تکملے کے برابر ہو۔ یہ تکمل اور تفرق کے درمیان رشتہ کو اور طاقت دیتا ہے۔

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx$ میں ہونے کی ضرورت ہے کہ تفاعل f کو بہترین طریقہ سے بیان کرنے کی اور $[a, b]$ میں مسلسل مثال کے طور پر، محدود تکملہ $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ پر غور کرنا غلط ہے، کیونکہ تفاعل f جو کہ $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ سے ظاہر کیا گیا ہے، جو کہ بند وقفہ $[-2,3]$ کے حصے میں بیان نہیں کیا گیا ہے۔

$\int_a^b f(x)\,dx$ کی تحسیب کے اقدامات

(i) غیر معین تکملہ $\int f(x)\,dx$ معلوم کیجیے۔ مان لیجیے یہ F(x) ہے۔ تکمل میں مستقلہ C رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہے کیونکہ اگر ہم F(x) کی بجائے F(x) + C پر غور کرتے ہیں تو، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}]_a^b = [\mathrm{F}(b) + \mathrm{C}] - [\mathrm{F}(a) + \mathrm{C}] = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

اس طرح، اختیاری مستقلہ معین تکملہ قدر کی تحسیب کرنے میں غائب ہو جاتا ہے

(ii) $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = [\mathrm{F}(x)]_a^b$ کی قدر کا اندازہ لگائیے، جو کہ $\int_a^b f(x)\,dx$ کی قدر ہے

اب ہم کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 27: ذیل تکملوں کی قدر معلوم کیجیے:

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$ (iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$

حل

(i) مان لیجیے $I=\int_2^3 x^2\,dx$ ہے۔ کیونکہ $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}=F(x)$ ہے

اس لیے، دوسرے بنیادی مسئلہ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I=F(3)-F(2)=\frac{27}{3}-\frac{8}{3}=\frac{19}{3}$$

(ii) مان لیجیے $I=\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ ہے۔ ہم پہلے تکملے کا ضد مشتق معلوم کرتے ہیں۔

$30-x^{\frac{3}{2}}=t$ رکھیے۔ تب $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx=dt$ یا $\sqrt{x}\,dx=-\frac{2}{3}dt$ ہے۔

اس طرح، $\displaystyle F(x)=\int \frac{\sqrt{x}}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx=-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-x^{\frac{3}{2}})}\right]$

اس لیے، احصا کے دوسری بنیادی مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$$I=F(9)-F(4)=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)}-\frac{1}{30-8}\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{22}\right]=\frac{19}{99}$$

(iii) مان لیجیے $I=\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

جزوی کسروں کا استعمال کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$$

تاکہ $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}=-\log|x+1|+2\log|x+2|=F(x)$

اس لیے، احصا کے دوسری بنیادی مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$$I = F(2) - F(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) مان لیجیے $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$، $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt$ پر غور کیجیے۔

$\sin 2t = u$ رکھیے تاکہ $2\cos 2t\, dt = du$ یا $\cos 2t\, dt = \frac{1}{2} du$

تاکہ $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = F(t) \text{ (مان لیجیے)}$$

اس لیے، تکملہ احصا کے دوسرے بنیادی مسئلہ سے

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{8}\left[\sin^4\frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

مشق 7.9

سوال 1 تا 20 میں معین تکملوں کی قدر معلوم کیجیے

1. $\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ **2.** $\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx$ **3.** $\int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)\,dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$ **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$ **6.** $\int_4^5 e^x\,dx$ **7.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec} x\,dx$ **9.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ **13.** $\int_2^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1}\,dx$ **15.** $\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$

16. $\int_1^2 \frac{5x^2\,dx}{x^2+4x+3}$ **17.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + x^3 + 2)\,dx$ **18.** $\int_0^{\pi} \left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

19. $\int_0^2 \frac{6x+3}{x^2+4}\,dx$ **20.** $\int_0^1 \left(x\,e^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right)dx$

سوال 21 تا 22 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

-21 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ برابر ہے

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

-23 $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2}$ برابر ہے

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 بدل کے ذریعے معین تکملوں کی قدر معلوم کرنا
(Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

پچھلے سیکشن میں ہم نے غیر معین تکملہ کو معلوم کرنے میں بہت سے طریقوں پر بحث کی ہے۔ غیر معین تکملے کو معلوم کرنے کے لیے ایک مخصوص طریقہ بدل کا طریقہ ہے۔

$\int_a^b f(x)\, dx$ کا بدل کے ذریعہ قدر کا اندازہ لگانے کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ کے اقدامات ہو سکتے ہیں۔

-1 تکملے پر بغیر انتہا کے غور کیجیے $y = f(x)$ یا $x = g(y)$ رکھیے تا کہ دیا ہوا تکملہ ایک جانی پہچانی شکل اختیار کر لے۔

-2 نئے تکملے کا نئے متغیر کی مناسبت سے بغیر تکمل کے مستقلہ کو ظاہر کیے ہوئے تکمل کیجیے۔

-3 نئے متغیر کے لیے دوبارہ بدل رکھیے اور جواب کو اصل متغیر کی شکل میں لکھیے۔

-4 تکملہ کی دی ہوئی انتہا پر جواب کی قدریں (3) میں معلوم کیجیے اور قدروں کا فرق بالائی اور زیریں حد پر معلوم کیجیے۔

نوٹ اس طریقہ کو جلدی کرنے کے لیے ہم ذیل کی طرح آگے بڑھ سکتے ہیں۔ (1) اور (2) اقدامات کو کرنے کے بعد (3) قدم کی کوئی ضرورت نہیں ہے۔ یہاں، تکملے کو بذاتِ خود نئے متغیر میں رکھا جائے گا، اور تکملہ کی انتہائیں اسی کے مطابق بدل دی جائیں گی، تا کہ ہم آخری قدم کو انجام دے سکیں۔

ہمیں یہ مثالوں کے ذریعے سمجھنا چاہیے۔

مثال 28: $\int_{-1}^{1} 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: $t = x^5 + 1$ رکھیے، تب $dt = 5x^4 dx$ ہے۔

اس لیے، $\int 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx = \int \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$

اس طرح، $\int_{-1}^{1} 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

متبادل کے طور پر، ہم پہلے اس تکملے کو تبدیل کریں گے اور پھر تبدیل ہوئے تکملہ کا نئی انتہاؤں کے ساتھ قیمت کا اندازہ لگائیں گے۔

مان لیجیے $t = x^5 + 1$ ہے۔تب $dt = 5x^4 dx$

یہ ذہن نشین کر لیجیے، کہ جب $x = -1$، $t = 0$ اور جب $x = 1$، $t = 2$

اس طرح جب x -1 سے 1 کی طرف جاتا ہے، t، 0 سے 2 کی طرف ہے

اس لیے $\int_{-1}^{1} 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx = \int_0^2 \sqrt{t}\, dt$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

مثال 29: $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $t = \tan^{-1} x$ ہے، تب $dt = \frac{1}{1+x^2}\, dx$ ہے۔نئی انتہائیں $x = 0$ تو $t = 0$ اور جب $x = 1$ تو $t = \frac{\pi}{4}$ ہیں۔اس طرح جب x 0 سے '1' کی طرف بڑھتا ہے، t، 0 سے $\frac{\pi}{4}$ کی طرف بڑھتا ہے

اس لیے $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$

مشق 7.10

1 تا 8 سوالوں میں بدل کے ذریعے کا استعمال کرکے تکملوں کی قدر معلوم کیجیے۔

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\, \cos^5 \phi\, d\phi$
3. $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$
4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\, dx$ ($x+2=t^2$ رکھیے)
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$
6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$
7. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$
8. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) e^{2x} dx$

سوال 9 اور 10 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

9۔ تکملے $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx$ کی قدر ہے

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10۔ اگر $f(x) = \int_0^x t \sin t\, dt$ ہے، تب $f'(x)$ ہے

(A) $\cos x + x \sin x$ (B) $x \sin x$

(C) $x \cos x$ (D) $\sin x + x \cos x$

7.10 معین تکملوں کی کچھ خصوصیات (Some Properties of Definite Integrals)

ہم نے ذیل میں معین تکملوں کی کچھ خاص خصوصیات بیان کی ہیں۔ یہ معین تکملوں کی قدر معلوم کرنے میں اور زیادہ مفید ثابت ہوں گی۔

$$\mathbf{P_0}: \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\mathbf{P_1}: \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$ خاص طور پر $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$$\mathbf{P_2}: \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\mathbf{P_3:}\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

$$\mathbf{P_4:}\ \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(یہ بات قابل غور ہے کہ P_4 ، P_3 کا ایک خاص کیس ہے)

$$\mathbf{P_5:}\ \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

$\mathbf{P_6:}\ \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ اگر $f(2a-x) = f(x)$ اور 0 ہے اگر $f(2a-x) = -f(x)$

$\mathbf{P_7:}$ (i) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ، اگر f ایک جفت تفاعل ہے، یعنی، اگر $f(-x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ ، اگر f ایک طاق تفاعل ہے یعنی، اگر $f(-x) = -f(x)$ ہے،

ہم ان خصوصیات کے ثبوت ایک ایک کر کے دیتے ہیں۔

P_0 کا ثبوت: $x=t$ بدل کر کے اسے سیدھے طور پر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

P_1 کا ثبوت: مان لیجیے f ، F کا ضد مشتق ہے ۔ تب، احصا کے دوسرے بنیادی مسئلہ سے ہمارے پاس ہے

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = -[\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

یہاں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ، اگر $a=b$ ہے، تب $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 کا ثبوت: مان لیجیے F ، t کا ضد مشتق ہے، تب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \quad \ldots(1)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a) \quad \ldots(2)$$

اور

$$\int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(c) \quad \ldots(3)$$

(2) اور (3) کو جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

یہ خصوصیت $\mathbf{P_2}$ کو ثابت کرتا ہے۔

P_3 کا ثبوت: مان لیجیے $t=a+b-x$ ہے۔ تب $dt=-dx$ ہے۔ جب $x=a$، $t=b$ اور $x=b$، $t=a$ ہے۔

اس لیے

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \quad (P_1 \text{ سے})$$

$$= \int_a^b f(a+b-x) \quad (P_0 \text{ سے})$$

P_4 کا ثبوت: $t=a-x$ رکھیے۔ تب $dt=-dx$ ہے۔ جب $x=0$، $t=a$ اور جب $x=a$، $t=0$۔ اب

کی طرح آگے بڑھنے پر

P_5 کا ثبوت: P_2 کا استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$

دوسرے تکملے کے دائیں ہاتھ کی طرف مان لیجیے $t=2a-x$۔ تب $dt=-dx$ ہے۔ جب $x=a$، $t=a$ اور جب $x=2a$، $t=0$ ہے۔ ساتھ ہی $x=2a-t$۔

اس لیے دوسرا تکملہ ہو جاتا ہے

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

اس لیے $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6 کا ثبوت: P_5 کا استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad ...(1)$$

اب اگر، $f(2a-x)=f(x)$ ہے، تب (1) ہو جاتی ہے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

اور اگر $f(2a-x)=-f(x)$، تب (1) ہو جاتی ہے

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

P_7 کا ثبوت: P_2 کا استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

تب، مان لیجیے پہلے تکملہ میں دائیں ہاتھ کی طرف $t = -x$

$-dt = -dx$ جب $x = -a$، $t = a$

اور جب $x = 0$، $t = 0$ ساتھ ہی $x = -t$

اس لیے،
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad (P_0 \text{ سے}) \qquad \ldots(1)$$

(i) اب، اگر f ایک جفت تفاعل ہے۔ تب $f(-x) = f(x)$ اور اس لیے (1) ہو جاتی ہے

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ii) اگر f ایک طاق تفاعل ہے، تب $f(-x) = -f(x)$ اور اس لیے (1) ہو جاتی ہے

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

مثال 30: $\int_{-1}^{2} |x^3 - x|\,dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: ہم یہ ذہن نشین کرتے ہیں کہ $[-1, 0]$ پر $x^3 - x \geq 0$ ہے اور $[0, 1]$ پر $x^3 - x \leq 0$ ہے اور $[1, 2]$ پر $x^3 - x \geq 0$ ہے۔ اس لیے P_2 سے ہم لکھتے ہیں

$$\int_{-1}^{2} |x^3 - x|\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}$$

مثال 31: $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\sin^2 x$ ایک جفت تفاعل ہے۔اس لیے، P_7 (i) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

مثال 32: $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$۔ تب P_4 سے ہمارے پاس ہے

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)\, dx}{1+\cos^2(\pi-x)}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - I$$

یا
$$2\,I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

یا
$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x=t$ رکھیے تا کہ $-\sin x\, dx = dt$ ہوا جب $x=0$، $t=1$ اور جب $x=\pi$، $t=-1$ ہے۔اس لیے، (P_1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$ (کیونکہ $\frac{1}{1+t^2}$ جفت تفاعل ہے، P_7 سے)

$$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

مثال 33: $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ہے۔ مان لیجیے $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$ ہے۔ تب

$f(-x) = \sin^5(-x)\cos^4(-x) = -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$ یعنی f ایک منفی فنکشن ہے۔

اس لیے P_7 (ii) سے I=0 ہے۔

مثال 34: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad \text{......(1)}$$

تب، P_4 سے

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^4(\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4(\frac{\pi}{2} - x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \quad \text{......(2)}$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

اس لیے $I = \frac{\pi}{4}$

مثال 35: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے
$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \quad \text{......(1)}$$

تب، P_3 سے

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx \qquad ...(2)$$

(1)اور(2) کوجمع کرنے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\,I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$ اس لیے $$I = \frac{\pi}{12}$$

مثال36: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$

تب، P_4 سے

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx$$

I کی دونوں قدروں کوجمع کرنے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\,I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2)\,dx$$ (log 2 کوجمع کرنے اورگھٹانے پر)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx$$ (کیوں؟)

پہلے تکملے میں $2x = t$ رکھیے۔تب $2\,dx = dt$، جب $x = 0$، $t = 0$ اور جب $x = \frac{\pi}{2}$، $t = \pi$ ہے۔

اس لیے $$2\,I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$2\,I = \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$ [P_6 سے کیوں کہ $\sin(\pi - t) = \sin t$]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx - \frac{\pi}{2} \log 2 \quad (\text{متغیر } t \text{ کو } x \text{ سے بدلنے پر})$$

$$= I - \frac{\pi}{2} \log 2$$

اس طرح $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \frac{-\pi}{2} \log 2$

مشق 7.11

معین تکملوں کی خصوصیات کا استعمال کر کے، 1 تا 18 سوالوں میں تکملوں کی قدر معلوم کیجیے

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x \, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$

5. $\int_{-5}^{5} |x+2| \, dx$

6. $\int_2^8 |x-5| dx$

7. $\int_0^1 x(1-x)^n dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x) \, dx$

9. $\int_0^2 x\sqrt{2-x} \, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log \sin x - \log \sin 2x) \, dx$

11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1+\sin x}$

13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$

14. $\int_0^{2\pi} \cos^5 x \, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin x \cos x} dx$

16. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x) \, dx$

17. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$

18. $\int_0^4 |x-1| \, dx$

19۔ دکھایئے کہ $\int_0^a f(x)g(x) \, dx = 2\int_0^a f(x) \, dx$ ہے، اگر f اور g، $f(x)=f(a-x)$ اور $g(x)+g(a-x)=4$ سے بیان کیے گئے ہیں

سوال 20 اور 21 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

20۔ $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)\, dx$ کی قدر ہے

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21۔ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ کی قدر ہے

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) -2

متفرق مثالیں

مثال 37: $\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ دریافت کیجیے

حل: مان لیجیے $t = 1 + \sin 6x$ ہے، تاکہ $dt = 6\cos 6x\, dx$

اس لیے $\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}} dt$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + C$$

مثال 38: $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$ معلوم کیجیے

حل: ہمارے پاس ہے $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \int \frac{(1-\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4} dx$

رکھیے $1 - \frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$، تاکہ $\frac{3}{x^4} dx = dt$

اس لیے $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + C$

مثال 39: $\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)(x^2+1)}$ معلوم کیجیے

حل: ہمارے پاس ہے

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \qquad \ldots(1)$$

اب دکھائیے
$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \qquad (2)$$

اس طرح
$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$
$$= (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$$

دونوں طرف کے ضریبوں کا موازنہ کرنے پر، ہمیں $A+B=0$، $C-B=0$ اور $A-C=1$ حاصل ہوتا ہے جو کہ $A=\frac{1}{2}$، $B=C=-\frac{1}{2}$ دیتا ہے۔ A، B اور C کی قدریں (2) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad \ldots(3)$$

دوبارہ، (3) کو (1) میں رکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

اس لیے

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

مثال 40: $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$ کو معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے
$$I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$$
$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

پہلے تکملے میں، ہم '1' کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیتے ہیں۔ تب اس کا تکمل بالحصص کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x}\,x\,dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$
$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \ldots(1)$$

دوبارہ، $\int \frac{dx}{\log x}$ ، پرغور کیجیے، 'I' کو دوسرا تفاعل لیجیے اور تکمل بالحصص کرنے پر

ہمارے پاس ہے

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x \left\{ -\frac{1}{(\log x)^2} \left(\frac{1}{x} \right) \right\} dx \right] \qquad \text{(2)...}$$

(2) کو (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\mathrm{I} = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + \mathrm{C}$$

مثال 41: $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} \right] dx$ کو معلوم کیجیے

حل: ہمارے پاس ہے

$$\mathrm{I} = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} \right] dx = \int \sqrt{\tan x}\,(1 + \cot x)\, dx$$

$\tan x = t^2$ رکھیے، تا کہ $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$ ہو

یا
$$dx = \frac{2t\, dt}{1 + t^4}$$

تب
$$\mathrm{I} = \int t \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \frac{2t}{(1 + t^4)}\, dt$$

$$= 2 \int \frac{(t^2 + 1)}{t^4 + 1}\, dt = 2 \int \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt}{\left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right)} = 2 \int \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt}{\left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + 2}$$

$t - \frac{1}{t} = y$ رکھیے، تا کہ $\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = dy$ ہو۔ تب

$$\mathrm{I} = 2 \int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2} \right)^2} = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} + \mathrm{C} = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{\left(t - \frac{1}{t} \right)}{\sqrt{2}} + \mathrm{C}$$

$$= \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}\, t} \right) + \mathrm{C} = \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2 \tan x}} \right) + \mathrm{C}$$

مثال 42: $\int \frac{\sin 2x \cos 2x \, dx}{\sqrt{9-\cos^4(2x)}}$ کو معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $\mathrm{I} = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}} dx$

$\cos^2(2x) = t$ رکھیے، تاکہ $4 \sin 2x \cos 2x \, dx = -dt$

اس لیے $\mathrm{I} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{4} \sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + \mathrm{C} = -\frac{1}{4} \sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right] + \mathrm{C}$

مثال 43: $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)| dx$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: یہاں
$$f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x \text{ for } -1 \le x \le 1 \\ -x \sin \pi x \text{ for } 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

اس لیے
$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x \, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x \, dx$$

دونوں تکملوں کا دائیں ہاتھ کی طرف تکمل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

مثال 44: $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ کی قدر معلوم کیجیے

حل: مان لیجیے $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \, dx}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)}$ (P_4 کا استعمال کرکے)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$
$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \mathrm{I}$$

اس طرح $$2\mathrm{I} = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

یا $$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$ (P_6 کا استعمال کرکے)

(شمار کنندہ اور نسب نما کو $\cos^2 x$ سے تقسیم کرنے پر)

$b\tan x = t$ رکھیے، تاکہ $b\sec^2 x\, dx = dt$ ہو۔ ساتھ ہی، جب $x = 0$، $t = 0$ اور جب $t \to \infty$،

اس لیے، $$\mathrm{I} = \frac{\pi}{b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi}{b}\cdot\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{t}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi^2}{2\,ab}$$

باب 7 پر مبنی متفرق مشق

سوال 1 تا 24 میں تفاعلات کا تکملہ کیجیے

1. $\dfrac{1}{x - x^3}$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$ **3.** $\dfrac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [اشارہ $x = \dfrac{a}{t}$ رکھیے]

4. $\dfrac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}$ **5.** $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [اشارہ $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$، $x = t^6$ رکھیے]

6. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ **7.** $\dfrac{5x}{sin\,(x-a)}$ **8.** $\dfrac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}$ **10.** $\dfrac{sin^8 - cos^8 x}{1 - 2\,sin^2 x\,cos^2 x}$ **11.** $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}}$ **13.** $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ **14.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\; e^{\log \sin x}$ **16.** $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$ **17.** $f'(ax+b)\,[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+\alpha)}}$ **19.** $\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x} - \cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x} + \cos^{-1}\sqrt{x}},\ x \in [0, 1]$

20. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **21.** $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$ **22.** $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

23. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **24.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

25 تا 33 سوالوں میں معین تکملوں کی قدر معلوم کیجیے۔

25. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$ **27.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

28. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$ **29.** $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **30.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$

33. $\displaystyle\int_1^4[|x-1|+|x-2|+|x-3|]\,dx$

مندرجہ ذیل (34 تا 39 سوالوں) کو ثابت کیجیے

34. $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2(x+1)}=\frac{2}{3}+\log\frac{2}{3}$ **35.** $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx=1$

36. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **37.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{2}{3}$

38. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\tan^3 x\,dx=1-\log 2$ **39.** $\displaystyle\int_0^1\sin^{-1}x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$

40۔ $\displaystyle\int_0^1 e^{2-3x}dx$ کی حاصل جمع کے طور پر قدر معلوم کیجیے۔

41 تا 44 سوالوں میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے

41۔ $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ برابر ہے

(A) $\tan^{-1}(e^x)+C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x})+C$

(C) $\log(e^x-e^{-x})+C$ (D) $\log(e^x+e^{-x})+C$

42۔ $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$ برابر ہے

(A) $\dfrac{-1}{\sin x+\cos x}+C$ (B) $\log|\sin x+\cos x|+C$

(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

43۔ اگر $f(a + b - x) = f(x)$ کے ہے، تب $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ برابر ہے

(A) $\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\,dx$ (B) $\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\,dx$

(C) $\dfrac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\,dx$ (D) $\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

44۔ $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx$ کی قدر ہے

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) $\dfrac{\pi}{4}$

خلاصہ (Summary)

◆ تکمل، تفرق کا معکوس طریقہ ہے۔ تفرقی انحصا (کیلکولس) میں ہمیں ایک تفاعل دیا ہوا ہو اور ہمیں اس تفاعل کا مشتق یا معلوم کرنا ہوتا ہے، لیکن تکمل احصا میں، ہمیں وہ تفاعل معلوم کرنا ہے جس کا تفرق دیا ہوا ہے۔ اس طرح، تکمل وہ طریقہ ہے جو کہ تفرق کا معکوس ہے۔

مان لیجیے $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ہے۔ تب ہم $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ لکھتے ہیں۔ ان تکملوں کو لامحدود تکملے یا عام تکملے کہتے ہیں، C کو تکمل کا مستقلہ کہتے ہیں۔ ان تمام تکملوں میں مستقلہ کا فرق ہوتا ہے۔

◆ جیومیٹریائی نقطہ نظر سے، ایک غیر معین تکملہ منحنیوں کی فیملی کا حاصل جمع ہے، جس میں سے ہر ایک کو ایک منحنی کو بجو دمتوازی میں بدل کر y- محور کے ساتھ اوپر یا نیچے کی طرف رکھ کر حاصل کیا جاتا ہے۔

◆ غیر معین تکملوں کی کچھ خصوصیات مندرجہ ذیل میں دی گئی ہیں:

.1 $\int[f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

.2 کسی بھی حقیقی عدد k کے لیے، $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

اور عام طور پر، اگر $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ فنکشن ہیں اور $k_1, k_2, \ldots, k_n$ حقیقی اعداد میں، تب

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\, dx$$
$$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + \ldots + k_n \int f_n(x)\, dx$$

◆ **کچھ معیاری تکملے (Some Standard Integrals)**

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ خاص طور پر $\int dx = x + C$

(ii) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ (iii) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(iv) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ (v) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

(vi) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(vii) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$ (viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$ (x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$ (xii) $\int e^x dx = e^x + C$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ (xiv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + C$ (xvi) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

◆ **جزوی کسروں کے ذریعے تکمل (Integration by partial fractions)**

یاد کیجیے کہ ایک ناطق فنکشن دو کثیر رکنیوں $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کی نسبت ہے، جہاں P(x) اور Q(x)، x میں کثیر رکنیاں ہیں اور $Q(x) \neq 0$۔ اگر کثیر رکنی P(x) کا درجہ کثیر رکنی Q(x) کے درجہ سے زیادہ ہے، تب ہم P(x) کو Q(x) سے تقسیم کر سکتے ہیں تاکہ $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ہو، جہاں T(x)، x میں ایک کثیر رکنی ہے اور $P_1(x)$ کا درجہ Q(x) کے درجہ سے کم ہے۔ T(x) ایک کثیر رکنی ہے اس لیے اس کا تکمل آسانی سے کیا جاسکتا

ہے۔ $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ کا تکمل $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ کی جزوی کسروں کے حاصل جمع کے طور پر رکھ کر درج ذیل طریقوں سے کیا جاسکتا ہے:

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, a \neq b$

2. $\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$

3. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

4. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$

5. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

جہاں x^2+bx+c کے مزید اور اجزا ضربی نہیں ہوسکتے۔

◆ **بدل کے ذریعے تکمل (Integra tion by Substitution)**

تکمل کے متغیر میں بدلاؤ کبھی کبھی ایک تکملے کو کسی ایک بنیادی تکملہ میں تحلیل کر دیتا ہے۔ وہ طریقہ جس میں ہم متغیر کو کسی دوسرے متغیر میں بدل دیتے ہیں بدل کا طریقہ کہلاتا ہے۔ جب تکملے میں کوئی ٹرگنومیٹریائی تفاعل ملوث ہوتا ہے، ہم کسی بھی جانی پہچانی اکائی کا استعمال تکملے کو معلوم کرنے کے لیے کرتے ہیں۔ بدل کا استعمال کر کے، ہم ذیل معیاری تکملے حاصل کرتے ہیں۔

(i) $\int \tan x \, dx = \log|\sec x| + C$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

◆ **کچھ خصوصی تفاعلات کے تکملے (Integrals of some special functions)**

(i) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ (iii) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log | x + \sqrt{x^2 + a^2} | + C$

◆ **تکمل بالحصص (Integration by Parts)**

دیئے ہوئے فنکشنوں f_1 اور f_2 کے لیے، ہمارے پاس ہے۔

$\int f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx = f_1(x) \int f_2(x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \cdot \int f_2(x)\, dx \right] dx$ یعنی، دو

تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل = پہلا تفاعل × دوسرے تفاعل کا تکملہ – تکملہ [پہلے فنکشن کا تفرقی ضریب × دوسرے فنکشن کا تکملہ]۔ پہلے اور دوسرے فنکشن کو چیسے کرنے میں احتیاط برتنی ہوگی۔ صاف طور پر، ہم اس تفاعل کو دوسرے تفاعل کے طور پر لیں گے جس کا تکملہ ہمیں اچھی طرح سے معلوم ہو۔

◆ $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + C$

◆ **کچھ مخصوص قسم کے تکملے (Some Special types of Integrals)**

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ یا $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ قسم کے تکملوں کو معیاری شکل میں بدلا جا سکتا ہے۔

اور انھیں اس طرح ظاہر کرتے ہیں

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{px + q\, dx}{ax^2 + bx + c}$ یا $\int \frac{px + q\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ قسم کے تکملوں کو معیاری شکل میں ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$px + q = \text{A}\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + \text{B} = \text{A}\,(2ax + b) + \text{B}$، جہاں A اور B کو دونوں طرف کے ضریبوں کا موازنہ کرکے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

- ہم نے $\int_a^b f(x)\, dx$ کو منحنی $y = f(x)$، $a \le x \le b$، x– محور اور مختص $x=a$ اور $x=b$ سے گھرے ہوئے رقبہ کے طور پر بیان کیا ہے۔ مان لیجیے دیئے ہوئے وقفہ [a,b] میں x موجود ہے تب $\int_a^x f(x)\, dx$ رقبہ تفاعل A(x) ظاہر کرتا ہے۔ یہ رقبہ تفاعل کا نظریہ تکمل احصا کے بنیادی مسئلہ کی طرف لے جاتا ہے۔

- **تکملہ احصا کا پہلا بنیادی مسئلہ (First fundamental theorem of integral calculus)**

مان لیجیے رقبہ فنکشن اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

$$\text{A}(x) = \int_a^x f(x)\, dx \quad x \ge a$$

جہاں فنکشن f کو وقفہ $[a, b]$ پر مسلسل مانا گیا ہے۔ تب $\text{A}'(x) = f(x)$ ہے تمام $x \in [a, b]$ کے لیے

- **تکملہ احصا کا دوسرا بنیادی مسئلہ (Second fundamental theorem of integral calculus)**

مان لیجیے f، x کا مسلسل تفاعل ہے جو کہ بند وقفہ $[a, b]$ میں بیان کیا گیا ہے اور F ایک دوسرا تفاعل ہے، تاکہ $\frac{d}{dn}\text{F}(n) = f(n)$ تمام x کے لیے جو کہ f کے علاقہ میں ہیں۔ تب

$$\int_a^b f(x)\, dx = [\text{F}(x) + \text{C}]_a^b = \text{F}(b) - \text{F}(a)$$

یہ وسعت علاقہ $[a, b]$ پر f کا معین تکملہ کہلاتا ہے، جہاں a اور b تکمل کی انتہا کہلاتی ہیں a زیریں انتہا ہے اور b بالائی انتہا ہے۔

صاف طور پر B_1، B_2، B_3 باہمی اخراجی ہیں اور ختم ہونے والے مکمل (Exhaustive) وقوعات ہیں اور اس لیے، وہ سیمپل فضا کی تقسیم کی نمائندگی کرتے ہیں۔

مان لیجیے E وہ وقوعہ ہے 'جس میں بولٹ خراب ہے'

وقوعہ E، B_1 کے ساتھ واقع ہوتا ہے یا B_2 کے ساتھ یا B_3 کے ساتھ۔ دیا گیا ہے کہ

$$P(B_1) = 25\% = 0.25 \text{، } P(B_2) = 0.35 \text{ اور } P(B_3) = 0.40$$

دوبارہ $P(E|B_1)$ = نکالے گئے بولٹ کی احتمالی کے یہ خراب ہے، جبکہ یہ دیا گیا ہے کہ یہ مشین A نے تیار کیا ہے۔

$= 5\% = 0.05$

اسی طرح، $P(E|B_2) = 0.04$، $P(E|B_3) = 0.02$

اس لیے، 'بائیس مسئلہ سے' سے، ہمارے پاس ہے

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)+P(B_3)P(E|B_3)}$$

$$= \frac{0.35\times 0.04}{0.25\times 0.05+0.35\times 0.04+0.40\times 0.02}$$

$$= \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

مثال 20: ڈاکٹر کو ایک مریض کو دیکھنے جانا ہے۔ پچھلے تجربے سے، یہ صاف ہے کہ اس کے ریل، بس، اسکوٹر یا اور کسی بھی نقل وحمل کے ذرائع سے آنے جانے کا احتمالات بالترتیب $\frac{3}{10}$، $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{10}$ اور $\frac{2}{5}$ ہیں۔ ریل، بس یا اسکوٹر سے دیر سے آنے کے احتمالات بالترتیب $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{12}$ ہیں، لیکن اگر وہ کسی اور دوسرے ذرائع سے آتا ہے، تب وہ دیر سے نہیں آئے گا۔ وہ دیر سے ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ ریل سے آیا ہے؟ وہ ریل سے آیا ہے؟

حل: مان لیجیے E وہ وقوعہ ہے کہ ڈاکٹر مریض کو دیر سے دیکھنے آتا ہے اور مان لیجیے کہ T_1، T_2، T_3، T_4 بالترتیب وہ وقوعات ہیں کہ ڈاکٹر ریل، بس، اسکوٹر یا اور کسی دوسرے نقل وحمل کے ذرائع سے آتا ہے۔

تب $P(T_1) = \frac{3}{10}$، $P(T_2) = \frac{1}{5}$، $P(T_3) = \frac{1}{10}$ اور، $P(T_4) = \frac{2}{5}$ (دیا ہوا ہے)

$P(E|T_1)$=وہ احتمال ہے کہ ڈاکٹر ریل سے دیر سے آتا ہے= $\frac{1}{4}$

اسی طرح، $P(E|T_2) = \frac{1}{3}$ ، $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$ اور $P(E|T_4) = 0$ ہے، کیونکہ وہ دیر سے نہیں ہے اگر وہ کسی دوسرے آمد ورفت کے ذرائع سے آتا ہے۔

اس لیے، بائیس مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$P(T_1|E)$ = یہ احتمال کہ ڈاکٹر ریل سے دیر سے آرہا ہے

$$= \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1)+P(T_2)P(E|T_2)+P(T_3)P(E|T_3)+P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0} = \frac{3}{40}\times\frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

اس لیے، مطلوبہ احتمال $\frac{1}{2}$ ہے

مثال 21: ایک آدمی اس بات کے لیے جانا جاتا ہے کہ وہ چار بار میں سے تین بار سچ بولتا ہے وہ ایک پانسہ اچھالتا ہے اور یہ رپورٹ کرتا ہے کہ یہ چھ ہے۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ یہ حقیقت میں چھ ہے۔

حل: مان لیجیے کہ E وہ وقوعہ ہے جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے کہ پانسہ اچھالنے میں چھ آتا ہے مان لیجیے S_1 وہ وقوعہ ہے جس میں چھ آتا ہے اور S_2 وہ وقوعہ ہے جس میں '6' نہیں آتا۔

تب $P(S_1)$ = یہ احتمال ہے کہ چھ آتا ہے= $\frac{1}{6}$

$P(S_2)$ = یہ احتمال ہے جس میں چھ نہیں آتا= $\frac{5}{6}$

$P(E|S_1)$ = احتمال ہے جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے کہ چھ آگیا ہے جبکہ چھ حقیقت میں آگیا ہے

= آدمی کے سچ بولنے کی احتمال = $\frac{3}{4}$

$P(E|S_2)$ = یہ احتمال ہے جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے کہ چھ آگیا ہے جبکہ چھ حقیقت میں نہیں آیا ہے

$= \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4} =$ یہ احتمال کہ آدمی سچ نہیں بولتا

اس طرح، بائیس مسئلہ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$P(S_1|E) =$ یہ احتمال ہے کہ جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے چھ آ گیا ہے، حقیقت میں چھ ہے

$$= \frac{P(S_1)\,P(E\,|S_1)}{P(S_1)\,P(E|S_1) + P(S_2)\,P(E|S_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

اس لیے، مطلوبہ احتمال $\frac{3}{8}$ ہے۔

مشق 13.3

1۔ ایک برتن میں 5 لال اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ ایک گیند بلا منصوبہ نکالی گئی، اس کا رنگ نوٹ کیا گیا اور پھر برتن میں واپس ڈال دی گئی۔ اس کے علاوہ، برتن میں دو مزید گیندیں اسی رنگ کی ڈال دی گئیں جس رنگ کی گیند نکالی گئی تھی اور پھر بلا منصوبہ ایک گیند نکالی گئی۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ دوسری گیند لال ہے؟

2۔ ایک بیگ میں 4 لال اور 4 کالی گیندیں ہیں، ایک دوسرے بیگ میں 2 لال اور 6 کالی گیندیں ہیں۔ دونوں میں سے بلا منصوبہ ایک بیگ چن لیا گیا اور بیگ سے ایک گیند نکالی گئی جو کہ لال رنگ کی پائی گئی ہے۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ گیند پہلے بیگ سے نکالی گئی ہے۔

3۔ ایک کالج کے طلبا میں سے یہ معلوم ہے کہ 60 فی صد طلبا ہاسٹل میں رہتے ہیں اور 40 فی صدی طلبا دن میں پڑھنے والے ہیں (یعنی ہاسٹل میں نہیں رہتے)۔ پچھلے سال کے سالانہ امتحان کے نتائج بتاتے ہیں کہ ہاسٹل میں رہنے والے 30 فی صدی طلبا کا A گریڈ آیا تھا اور جو طلبا ہاسٹل میں نہیں رہے ان میں سے 20 فی صدی کا A گریڈ آیا تھا۔ سال کے آخیر میں، کالج کا ایک لڑکا بلا منصوبہ چنا گیا اور اس کا A گریڈ ہے، اس کی کیا احتمالی ہے کہ طلبا ہاسٹل میں رہنے والا ہے؟

4۔ ایک کثیر جوابی ٹیسٹ میں ایک سوال کا جواب دینے کے لیے، ایک طالب علم یا تو جواب جانتا ہے یا اندازہ لگاتا ہے۔ مان لیجیے اس کا جواب جاننے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے اور اس کے اندازہ لگانے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ

جو طالب علم اندازہ لگاتا ہے کہ جواب صحیح ہے اس کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔اس کا کیا احتمال ہے کہ طلب علم جانتا ہے کہ اس کا دیا ہوا جواب صحیح ہے؟

5۔ ایک تجربہ گاہ میں کچھ بیماریوں کو معلوم کرنے کے لیے خون کی جانچ 99 فی صدی کامیاب ہے، جبکہ حقیقت میں بیماری موجود ہے۔ حالانکہ، ٹیسٹ 0.5 فی صدی صحت مند آدمیوں کے لیے غلط مثبت نتیجہ بھی نکالتا ہے (یعنی اگر ایک صحت مند آدمی کا ٹیسٹ کیا گیا ہے تب 0.005 احتمال کے ساتھ، ٹیسٹ کا مطلب ہے کہ اسے بیماری ہے)۔اگر حقیقت میں 0.1 فی صدی آبادی کو بیماری ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ آدمی کو بیماری ہے جب کہ دیا ہوا ہے کہ ٹیسٹ کا نتیجہ مثبت میں ہے؟

6۔ یہاں تین سکّے ہیں۔ایک سکہ دو ہیڈ رکھتا ہے (یعنی سکّے کے دونوں طرف ہیڈ ہے) دوسرا سکہ جانب دار ہے کہ جس میں ہیڈ 75 فی صد آتا ہے اور تیسرا سکہ غیر جانب دار نہیں ہے۔ تینوں سکوں میں سے ایک سکہ بلا منصوبہ کے چنا گیا ہے اور اُچھالا گیا، یہ ہیڈ دکھاتا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ دو ہیڈ والا سکہ ہے؟

7۔ ایک بیمہ کمپنی 2000 اسکوٹر ڈرائیور کا بیمہ کرتی ہے، 4000 کار ڈرائیور کا اور 6000 ٹرک ڈرائیور کا۔ حادثہ ہونے کا احتمال بالترتیب 0.01، 0.03 اور 0.15 ہے۔ ایک بیمہ ہوئے آدمی کا حادثہ ہو جاتا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ ایک اسکوٹر ڈرائیور ہے؟

8۔ ایک فیکٹری کے پاس دو مشینیں A اور B ہیں۔ سابقہ ریکارڈ یہ بتاتا ہے کہ جتنا انھیں دیا جاتا ہے اس میں مشین A، 60 فی صدی مال تیار کرتی ہے اور مشین B، 40 فی صدی مال تیار کرتی ہے۔ اس کے علاوہ مشین A کے ذریعے تیار کی گئی 2 فی صدی اشیا خراب تھیں اور مشین B کے ذریعہ تیار کی گئی 1 فی صدی اشیا خراب تھیں۔ تمام اشیا کو ایک جگہ رکھا گیا اور پھر بلا منصوبہ اس میں سے ایک اشیا کو چنا گیا اور پایا گیا کہ یہ اشیا خراب ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ اشیا مشین B کے ذریعے تیار کی گئی تھیں۔

9۔ دو گروپ ایک کارپوریشن کے بورڈ آف ڈائیریکٹر کی پوزیشن کے لیے مقابلہ کر رہے ہیں۔ پہلے اور دوسرے گروپ کے جیتنے کے احتمالات بالترتیب 0.6 اور 0.4 ہے۔ اس کے علاوہ اگر پہلا گروپ جیتا ہے تو نئی اشیا کے تعارف کرانے کے احتمال 0.7 ہے اور اسی کے مطابق دوسرے گروپ کے جیتنے پر نئی اشیا کو متعارف کرانے کا احتمال 0.3 ہے اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ نئی اشیا کا تعارف دوسرے گروپ کے ذریعہ کرایا گیا تھا۔

10۔ مان لیجیے کہ ایک لڑکی ایک پانسہ پھینکتی ہے۔ اگر اسے 5 یا 6 حاصل ہوتا ہے، وہ ایک سکہ تین بار اچھالتی ہے اور ہیڈ کی تعداد نوٹ کرتی ہے۔ اگر اسے 1، 2، 3، یا 4 حاصل ہوتا ہے، وہ ایک سکہ کو ایک بار ٹاس کرتی ہے اور نوٹ کرتی ہے کہ کیا ایک ہیڈ یا ٹیل حاصل ہوا ہے۔ اگر اسے بالکل ایک ہیڈ حاصل ہوا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ اس نے پانسہ کے ساتھ 1، 2، 3، یا 4 پھینکا تھا؟

11۔ ایک صنعت کار کے پاس تین مشین چلانے والے A، B اور C ہیں۔ پہلا مشین چلانے والا 'A' 1 فی صدی خراب اشیا بناتا ہے، جبکہ دوسرے مشین چلانے والے B اور C بالترتیب 5 اور 7 فی صدی خراب اشیا بناتے ہیں۔ A، 50 فی صدوقفہ کے لیے کام پر ہے، B، 30 فی صدوقفہ کے لیے کام پر ہے اور C، 20 فی صدوقفہ کے لیے کام پر ہے۔ ایک خراب اشیا تیار کی گئی ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ 'A' کے ذریعہ تیار کی گئی ہے؟

12۔ 52 تاشوں کی ایک گڈی سے '1' تاش کھو گیا ہے۔ گڈی میں بچے ہوئے باقی تاشوں میں دو تاش نکالے گئے ہیں اور دونوں ہی اینٹ کے پتے پائے گئے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ کھویا ہوا تاش ایک اینٹ کا پتہ تھا۔

13۔ A کے سچ بولنے کا احتمال $\frac{4}{5}$ ہے۔ ایک سکہ اُچھالا گیا۔ A بتاتا ہے کہ ہیڈ نمودار ہوا ہے۔ اس کا احتمال کہ حقیقت میں وہ ہیڈ تھا ہے۔

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14۔ اگر A اور B دو واقعات ہیں تا کہ A ⊂ B اور P (B) ≠ 0 ہے، تب مندرجہ ذیل میں کون سا صحیح ہے؟

(A) $P(A \mid B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) P(A|B) ¤ P(A) (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

13.6 بلا منصوبہ متغیر اور ان کا احتمالی بٹاؤ

(Random Variables and its Probability Distributions)

ہم پہلے ہی بلا منصوبہ تجربات اور سیمپل فضا کے بننے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ ان میں سے زیادہ تر تجربات میں، ہماری دلچسپی صرف خاص نتائج میں ہی نہیں تھی جو وقوع میں آتے ہیں بلکہ کچھ نمبروں میں بھی تھی جو نتائج کے ساتھ ملوث تھے جیسا کہ ذیل مثالوں یا تجربات میں دکھایا گیا ہے۔

(i) دو پانسوں کوٹاس کرنے میں، ہماری دلچسپی دو پانسوں کے اعداد کے حاصل جمع میں ہوسکتی ہے۔

(ii) ایک سکّے کو 50 مرتبہ اُچھالنے پر، ہم حاصل ہونے والے ہیڈ کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔

(iii) 20 اشیا کے ایک لاٹ سے بلا منصوبہ چار اشیا کو نکالنے کے ایک تجربہ میں (ایک کے بعد ایک) جس میں 6 خراب ہیں، ہم چار اشیا کے نمونے میں خراب اشیا جاننا چاہتے ہیں نا کہ خراب اور غیر خراب اشیا کی خاص تواتر میں۔

اوپر کے تمام تجربات میں، ہمارے پاس ایک اصول ہے، جو کہ تجربہ کے نتیجے کو ایک اکیلا حقیقی عدد دیتا ہے۔ تجربہ کے مختلف نتائج کے ساتھ یہ اکیلا حقیقی عدد بدل بھی سکتا ہے۔ اس لیے یہ ایک متغیر ہے۔ ساتھ ہی اس کی قدر ایک بلا منصوبہ تجربہ کے نتیجے پر مبنی ہے، اور اس لیے، یہ بلا منصوبہ متغیر کہلاتا ہے۔ ایک بلا منصوبہ متغیر عام طور سے 'X' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر آپ کو ایک تفاعل کی تعریف یاد ہو، تو آپ یہ محسوس کریں گے کہ بلا منصوبہ متغیر X حقیقت میں ایک تفاعل ہے جس کا علاقہ ایک بلا منصوبہ تجربہ کے نتائج کا سیٹ ہے (یا سیمپل فضا)۔ ایک بلا منصوبہ متغیر کی کوئی بھی حقیقی قدر ہوسکتی ہے، اس لیے، اس کا ہم۔علاقہ حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ اس لیے، ایک بلا منصوبہ متغیر کو ذیل طریقے کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے:

تعریف 4: ایک بلا منصوبہ متغیر ایک حقیقی قدر تفاعل ہے جس کا علاقہ ایک بلا منصوبہ تجربہ سیمپل فضا ہے۔

مثال کے طور پر، ہم ایک تجربہ پر غور کرتے ہیں جس میں ایک سکہ لگاتار دو مرتبہ ٹاس کیا گیا ہے۔ تجربہ کی سیمپل فضا ہے

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

اگر X حاصل شدہ ہیڈ کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، تب X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے اور ہر ایک نتیجے کے لیے، اس کی قدر ذیل کی طرح دی گئی ہے:

$$X(HH) = 2,\ X(HT) = 1,\ X(TH) = 1,\ X(TT) = 0$$

ایک سے زیادہ متغیر اسی سیمپل فضا پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر، مان لیجیے Y اوپر کی سیمپل فضا کے لیے ہیڈ اور ٹیل کے مقدار کے فرق کو تعداد کرتا ہے۔

تب $$Y(HH) = 2,\ Y(HT) = 0,\ Y(TH) = 0,\ Y(TT) = -2$$

اس طرح، X اور Y یکساں سیمپل فضا پر بیان کیے گئے دو مختلف بلا منصوبہ متغیر ہیں۔

مثال 22۔ ایک انسان ایک سکہ کو تین بار ٹاس اُچھالنے کا کھیل کھیلتا ہے۔ ہر ایک ہیڈ کے لیے، کھیل کھلانے والا 2 روپے دیتا ہے اور ہر ایک ٹیل کیے لیے اس آدمی کو کھیل کھلانے والے کو 1.50 روپے دینے پڑتے ہیں۔ مان لیجیے کہ اس آدمی کے ذریعہ

حاصل کی گئی یا کھوئی ہوئی رقم کو X سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے اور اسے تجربہ کی سیمپل فضا پر ایک تفاعل کے طور پر دکھائیے۔

حل: X ایک عدد ہے جس کی قدریں ایک بلامنصوبہ تجربہ کے نتائج پر بیان کی گئی ہیں۔ اس لیے، X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے۔

اب، تجربہ کی سیمپل فضا یہ ہے

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

تب

$$X(HHH) = Rs\ (2 \times 3) = Rs\ 6$$

$$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = Rs\ (2 \times 2 - 1 \times 1.50) = Rs\ 2.50$$

$$X(HTT) = X(THT) = (TTH) = Rs\ (1 \times 2) - (2 \times 1.50) = - Re\ 1$$

اور

$$X(TTT) = - Rs\ (3 \times 1.50) = - Rs\ 4.50$$

جہاں نفی کا نشان کھلاڑی کے نقصان کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرح، سیمپل فضا کے ہر ایک عنصر کے لیے، X کی ایک واحد قدر ہوتی ہے، اس لیے، سیمپل فضا پر X ایک تفاعل ہے جس کی وسعت یہ ہے

$$\{-1,\ 2.50,\ -4.50,\ 6\}$$

مثال 23: ایک تھیلے میں 2 سفید اور 1 لال گیندیں ہیں۔ بلامنصوبہ تھیلے میں سے ایک گیند نکالی گئی، اور اس کا رنگ نوٹ کرنے کے بعد ڈبے میں واپس رکھ دی گئی ہے۔ اس عمل کو دوبارہ دوہرایا گیا ہے۔ اگر 'X' دوسری بار میں نکالی گئی لال گیندوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، تو X بیان کیجیے۔

حل: مان لیجیے کہ تھیلے میں گیندوں کو r، w_1، w_2 سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب سیمپل فضا ہے

$$S = \{w_1 w_1, w_1 w_2, w_2 w_2, w_2 w_1, w_1 r, w_2 r, r w_1, r w_2, r r\}$$

اب، $\omega \in S$ کے لیے

$X(\omega)$ = لال گیندوں کی تعداد

اس لیے

$$X(\{w_1 w_1\}) = X(\{w_1 w_2\}) = X(\{w_2 w_2\}) = X(\{w_2 w_1\}) = 0$$

$$X(\{w_1 r\}) = X(\{w_2 r\}) = X(\{r w_1\}) = X(\{r w_2\}) = 1$$ اور $$X(\{r r\}) = 2$$

اس طرح، X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی 0، 1 یا 2 قدریں ہوسکتی ہیں۔

13.6.1 ایک بلامنصوبہ متغیر کا احتمالی بٹاؤ (Probability distribution of a random variable)

ہمیں تجربہ پر غور کرنا چاہیے جس میں دس خاندانوں $f_1, f_2, ..., f_{10}$ میں سے ایک خاندان اس طرح انتخاب کیا گیا ہے کہ ہر خاندان کا انتخاب مساوی امکانی ہو۔ مان لیجیے $f_1, f_2, ..., f_{10}$ خاندانوں میں افراد کی تعداد بالترتیب 3,4,3,2,5,4,3,6,4,5 ہے۔

ہم ایک خاندان کا انتخاب کرتے ہیں اور اس میں افراد کی تعداد کو X سے ظاہر کرتے ہیں۔ صاف طور پر، X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جو کہ مندرجہ ذیل کی طرح بیان کیا گیا ہے:

$$X(f_1) = 3,\ X(f_2) = 4,\ X(f_3) = 3,\ X(f_4) = 2,\ X(f_5) = 5,$$

$$X(f_6) = 4,\ X(f_7) = 3,\ X(f_8) = 6,\ X(f_9) = 4,\ X(f_{10}) = 5$$

اس طرح، X کوئی بھی قدر 2، 3، 4، 5 یا 6 لے سکتا ہے، جو اس پر مبنی ہے کہ کون سا خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

اب، X کی قدر 2 ہوگی جبکہ خاندان f_4 کا انتخاب کیا گیا ہے۔ X کی قدر 3 ہوسکتی ہے جبکہ f_1، f_2، f_3 میں سے کوئی سا بھی خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

اسی طرح $X = 4$، جبکہ f_1، f_6 یا f_9 خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

$X = 5$، جبکہ f_5، یا f_{10} خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

اور $X = 6$، جبکہ f_8 خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

کیوں کہ ہم نے یہ مانا ہے کہ منتخب کیے جانے کے لیے، ہر ایک خاندان مساوی امکانی ہے، خاندان f_4 کو منتخب کیے جانے کا احتمال $\frac{1}{10}$ ہے۔

اس طرح، X کی قدر 2 ہوسکتی ہے کے لیے احتمال $\frac{1}{10}$ ہے۔ ہم $P(X = 2) = \frac{1}{10}$ لکھتے ہیں۔

ساتھ ہی، کسی بھی خاندان f_1 ، f_3 یا f_7 کے منتخب کیے جانے کا احتمال ہے۔

$$P(\{f_1, f_3, f_7\}) = \frac{3}{10}$$

اسی طرح، اس کا احتمال کہ X کی قدر 3 ہوسکتی ہے =

ہم لکھتے ہیں
$$P(X = 3) = \frac{3}{10}$$

اسی طرح، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$P(X = 4) = P(\{f_2, f_6, f_9\}) =$$

$$P(X = 5) = P(\{f_5, f_{10}\}) =$$

اور
$$P(X = 6) = P(\{f_8\}) =$$

اس طرح کے بیانات جن میں بلامنصوبہ متغیر کی قدریں اسی کے مطابق احتمالات کے ساتھ دی جاتی ہیں، بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ کہلاتا ہے۔

عام طور پر، ایک بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ مندرجہ ذیل کی طرح بیان کیا گیا ہے:

تعریف 5 ایک بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ اعداد کا نظام ہے

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

جہاں،
$$p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

حقیقی اعداد $x_1, x_2, \ldots x_n$ ایک بلامنصوبہ متغیر X کی ممکن قدریں ہیں اور $p_i \; (i = 1,2,\ldots, n)$ بلامنصوبہ متغیر X کا احتمال ہے، جو کہ X_i کی قدر دیتا ہے، یعنی $P(X = x_i) = p_i$

نوٹ اگر x_i ایک بلامنصوبہ متغیر X کی ممکن قدریں ہیں، تب بیان $X = x_i$ سیمپل فضا کے لیے کچھ نقاط کے لیے درست ہے۔ اس لیے، اس کا احتمال کہ X، x_i قدریں لیتا ہے ہمیشہ غیر صفر ہے، یعنی $P(X = x_i) \neq 0$۔

ساتھ ہی بلامنصوبہ X کی تمام ممکن قدروں کے لیے، سیمپل فضا کے تمام عناصر کو لے لیا گیا ہے۔ اس لیے، ایک احتمالی بٹاؤ میں تمام احتمالات کا حاصل جمع '1' ہونا چاہیے۔

مثال 24: ایک اچھی طرح پھینٹی گئی 52 تاشوں کی ایک گڈی میں سے دو تاش واپس رکھنے کے ساتھ کامیابی کے ساتھ کھینچے گئے

ہیں۔ اکّوں کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

حل: اکّوں کی تعداد ایک بلامنصوبہ متغیر ہے۔ مان لیجیے اسے X سے ظاہر کیا گیا ہے۔ صاف طور پر X کی کوئی بھی قدر 0، 1 یا 2 ہو سکتی ہے۔

اب، کیونکہ نکالے گئے پتّوں کو واپس رکھا گیا ہے، اس لیے، دوبار نکالنا غیر تابع تجربات بناتا ہے۔

اس لیے، P (X=0) = P (بغیر اِکّے کے اور بغیر اِکّے کے)

= P (اِکّے کے بغیر) X P (اِکّے کے بغیر)

$$= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{144}{169}$$

P (X=1) = P (اِکّے کے بغیر یا اِکّے یا اِکّا اور اِکّے کے بغیر)

= P (اِکّے کے بغیر اور اِکّا) X P (اِکّا اور اِکّے کے بغیر)

= P (یکہ کے بغیر) P (یکہ) + P (یکہ) P (یکہ کے بغیر)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{24}{169}$$

اور P (X=2) = P (اِکّا اور اِکّا)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

اس طرح، مطلوبہ احتمالی بٹوارہ یہ ہے

X	0	1	2
P (X)	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

مثال 25: ایک پانسہ کے جوڑے کو تین بار اچھالنے میں ثنویت (doublet) کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے X دوہری تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ ممکن دوگنے ہیں

(1,1) , (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

صاف طور پر، X کی کوئی بھی قدر 0، 1، 2 اور 3 ہو سکتی ہے۔

ایک ڈبلیٹ حاصل کرنے کا احتمال $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ایک ڈبلیٹ حاصل نہ کرنے کا احتمال $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

اب $P(X=0) = P$ (کوئی ڈبلیٹ نہیں) $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

$P(X=1) = P$ (ایک ڈبلیٹ اور دو غیر ڈبلیٹ)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{6} \times \frac{5^2}{6^2}\right) = \frac{75}{216}$$

$P(X=2) = P$ (دو ڈبلیٹ اور ایک غیر ڈبلیٹ)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 3\left(\frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

اور $P(X=3) = P$ (تین دوہرے)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

اس طرح، مطلوبہ احتمالی بٹاؤ ہے

X	0	1	2	3
P (X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

تصدیق: احتمالات کا حاصل جمع

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216}$$

$$= \frac{125 + 75 + 15 + 1}{216} = \frac{216}{216} = 1$$

مثال 26: مان لیجیے ایک بلا منصوبہ انتخاب کیے گئے اسکول کے دن میں X ان گھنٹوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے جو آپ مطالعہ کرتے ہیں۔ احتمال X جو کہ x قدریں لے سکتا ہے، مندرجہ ذیل شکل رکھتا ہے، جہاں k کوئی بھی انجان مستقل ہے۔

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \text{ اگر} \\ kx, & x = 1 \text{ یا } 2 \text{ اگر} \\ k(5-x), & x = 3 \text{ یا } 4 \text{ اگر} \\ 0, & \text{ورنہ} \end{cases}$$

(a) k کی قدر معلوم کیجیے۔

(b) اس کا کیا احتمال ہے کہ آپ کم سے کم دو گھنٹے مطالعہ کرتے ہیں؟ بالکل صحیح 2 گھنٹے؟ زیادہ سے زیادہ 2 گھنٹے؟

حل: X کا احتمال بٹاؤ ہے

X	0	1	2	3	4
P (X)	0.1	k	$2k$	$2k$	k

(a) ہم جانتے ہیں کہ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

اس لیے $0.1 + k + 2k + 2k + k = 1$

یعنی، $k = 0.15$

(b) P (آپ کم سے کم دو گھنٹہ مطالعہ کرتے ہیں) $= P(X \geq 2)$

$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 2k + 2k + k = 5k = 5 \times 0.15 = 0.75$

P (آپ بالکل دو گھنٹہ مطالعہ کرتے ہیں) $= P(X = 2)$

$= 2k = 2 \times 0.15 = 0.3$

P (آپ زیادہ سے زیادہ دو گھنٹہ مطالعہ کرتے ہیں) $= P(X \leq 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.1 + k + 2k = 0.1 + 3k = 0.1 + 3 \times 0.15$

$= 0.55$

13.6.2 ایک بلا منصوبہ متغیر کا درمیانہ (Mean of a random variable)

بہت سے مسئلوں، میں ایک اکیلے عدد کے ذریعے بلا منصوبہ متغیر کے کچھ تاثرات بیان کرنے کی خواہش ہے جس کا اس کی احتمالی بٹاؤ کے ذریعے حساب لگایا جا سکتا ہے۔ اس طرح کے کچھ اعداد درمیانہ، وسطانیہ اور (Mode) مق ہیں۔ اس سیکشن میں ہم صرف درمیانہ پر بحث کریں گے۔ درمیانہ جگہ تلاش کرنے کا ایک پیمانہ ہے یا مرکزی طرف ہے، اس نظریہ میں کہ عام طور پر منصوبہ متغیر کی درمیانی یا اوسط قدر تلاش کرتا ہے۔

تعریف 6: مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ بالترتیب $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ احتمالات کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔ X کا درمیانہ، جو کہ μ سے ظاہر کیا گیا ہے، $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ عدد ہے، یعنی، درمیانہ X، X کی تمام ممکن قدروں کا اوسط وزن ہے، ہر ایک قدر کا اپنی احتمالی سے وزن کیا گیا ہے جس کے ساتھ یہ واقع ہوتا ہے۔

ایک بلامنصوبہ متغیر X کا درمیانہ X کی امید (Expectation) بھی کہلاتا ہے، جس کو E(X) سے ظاہر کیا جاتا ہے

اس طرح،
$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

دوسرے الفاظ میں، ایک بلامنصوبہ متغیر X کی امید X کی تمام ممکن قدروں کے مطابق احتمال کے حاصل ضرب کا حاصل ہوتا ہے۔

مثال 27: مان لیجیے پانسہ کے ایک جوڑے کو اچھالا گیا اور بلامنصوبہ متغیر X ان اعداد کا حاصل جمع ہے جو کہ دونوں پانسوں پر ظاہر ہوتے ہیں۔ X کا درمیانہ یا امید معلوم کیجیے۔

حل: تجربہ کی سیمپل فضا میں 36 بنیادی واقعات مرتب جوڑوں (x_i, y_i) کی شکل میں ہوتے ہیں، جہاں $x_i = 1,2,3,4,5,6$ اور y_i اور $y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ہیں۔

بلامنصوبہ متغیر X یعنی، دونوں سکوں پر اعداد کا حاصل جمع 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11 یا 12 قدریں لے گا۔

اب
$$P(X = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 4) = P(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = P(\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 9) = P(\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 10) = P(\{(4,6), (5,5), (6,4)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 11) = P(\{(5,6), (6,5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 12) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$$

X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X or x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X) or p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

اس لیے،

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}$$

$$+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$

اس طرح، دوصاف (اچھے) پانسوں کو اچھالنے پر ظاہر ہونے والے اعداد کا مجموعہ 7 ہے۔

13.6.3 ایک بلا منصوبہ متغیر کا تغیر (فرق) (Variance of a random variable)

ایک بلا منصوبہ متغیر کا درمیانہ ہمیں بلا منصوبہ متغیر کی اتار چڑھاؤ کی قدروں کی معلومات نہیں دیتا۔ حقیقت میں اگر تغیر چھوٹا ہے تب بلا منصوبہ متغیر کی قدریں درمیانہ کے نزدیک ہیں۔ ساتھ ہی بلا منصوبہ متغیر مختلف احتمالی بٹوارے کے ساتھ برابر درمیانہ رکھ سکتے ہیں، جیسا کہ X اور Y کے ذیل بٹوارے میں دکھایا گیا ہے۔

X	1	2	3	4
P (X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Y	-1	0	4	5	6
P (Y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

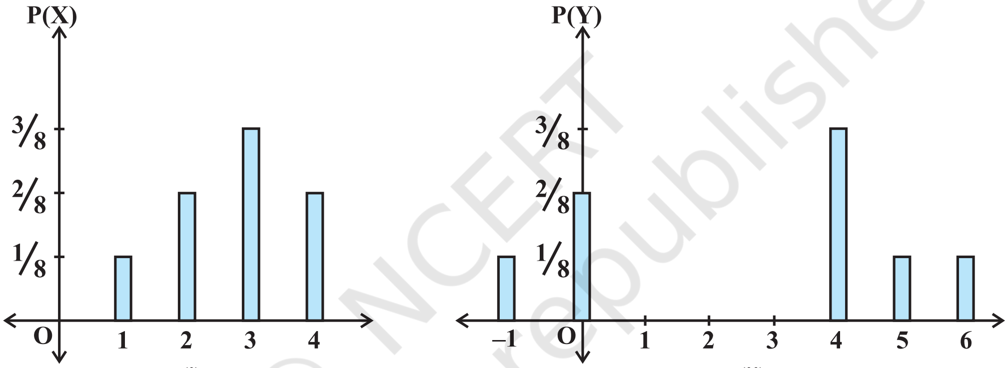
صاف طور پر

$$E(X) = 1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{2}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

اور

$$E(Y) = -1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{2}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{1}{8}= 6\times\frac{1}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

متغیر X اور Y مختلف ہیں، حالانکہ ان کے درمیان یکساں ہیں۔ ان بٹاؤں کو تصویر کے ذریعے ظاہر کر کے ان کا آسانی سے مشاہدہ کیا جا سکتا ہے۔



شکل 13.5

X کا Y سے فرق کرنے کے لیے، ہمیں وسعت کی پیائش کی ضرورت ہے جس کے لیے بلا منصوبہ متغیر کی قدریں پھیل جاتی ہیں۔ علم شماریات (Statistics) میں، ہم نے پڑھا ہے کہ تغیر بکھرے ہوئے یا پھیلے ہوئے اعداد و شمار کا ایک پیمانہ ہے۔ اسی طرح، ایک بلا منصوبہ متغیر کی قدروں کا پھیلنا یا متغیری کو تغیر کے ذریعہ پایا جا سکتا ہے۔

تعریف 7 مان لیجیے X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2,...,x_n$ بالترتیب احتمالات $p(x_1), p(x_2),..., p(x_n)$ کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔

مان لیجیے $\mu = E(X)$، X کا درمیانہ ہے۔ X کا تغیر، جو کہ Var (X) یا σ_x^2 سے ظاہر کیا گیا ہے، اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$\text{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\ p(x_i)$$

یا برابری کے طور پر $\sigma_x^2 = E(X-\mu)^2$

غیر منفی عدد

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\, p(x_i)}$$

بلامنصوبہ متغیر X کا معیاری انحراف (Standard Deviation) کہلاتا ہے۔

ایک بلامنصوبہ متغیر کا تغیر معلوم کرنے کا ایک دوسرا فارمولہ۔ (Another formula to find the variance of a random variable) ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+\mu^2-2\mu x_i)\, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\mu^2\, p(x_i) - \sum_{i=1}^{n}2\mu x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) + \mu^2 \sum_{i=1}^{n}p(x_i) - 2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i p(x_i)$$

کیونکہ $\sum_{i=1}^{n}p(x_i)=1$ اور $\left[\mu = \sum_{i=1}^{n}x_i p(x_i)\right]$ $= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) + 2\mu^2 - 2\mu^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) - \mu^2$$

یا $$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\, p(x_i)\right)^2$$

یا $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ جہاں $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i)$ ہے

مثال 28: ایک غیر جانب دار پانسہ کو اچھالنے پر حاصل کیے گئے اعداد کا تغیر (Variance) معلوم کیجیے۔

حل: تجربہ کی سیمپل فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔

مان لیجیے 'X' پانسہ کو اچھالنے پر حاصل ہوئے عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ تب X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 قدریں ہوسکتی ہیں۔

ساتھ ہی
$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

اس لیے، X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X	1	2	3	4	5	6
P (X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

اب
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$$
$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

ساتھ ہی
$$E(X^2) = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + 6^2\times\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

اس طرح،
$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$

مثال 29: 52 پتوں کی ایک اچھی طرح پھینٹی گئی تاش کی گڈی سے 2 پتے ایک کے بعد ایک نکالے گئے (یا لگاتار بغیر دوبارہ واپس ڈالے ہوئے)۔ بادشاہوں کی تعداد کے لیے درمیانہ، تغیر اور معیاری انحراف (S .D) معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے دو تاشوں کو نکالنے میں X بادشاہوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی 0، 1 یا 2 قدریں ہو سکتی ہیں۔

اب
$$P(X=0) = P(\text{کوئی بادشاہ نہیں}) = \frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48\times47}{52\times51} = \frac{188}{221}$$

$$P(X=1) = P(\text{ایک بادشاہ اور ایک غیر-بادشاہ}) = \frac{{}^{4}C_1\ {}^{48}C_1}{{}^{52}C_2}$$
$$= \frac{4\times48\times2}{52\times51} = \frac{32}{221}$$

اور
$$P(X=2) = P(\text{دو بادشاہ}) = \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{4\times3}{52\times51} = \frac{1}{221}$$

اس طرح، X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X	0	1	2
P (X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

اب (X کا درمیانہ) Mean of $X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

$$= 0\times\frac{188}{221} + 1\times\frac{32}{221} + 2\times\frac{1}{221} = \frac{34}{221}$$

ساتھ ہی $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$

$$= 0^2\times\frac{188}{221} + 1^2\times\frac{32}{221} + 2^2\times\frac{1}{221} = \frac{36}{221}$$

اب $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{36}{221} - \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$$

اس لیے $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{\sqrt{6800}}{221} = 0.37$

مشق 13.4

1۔ بیان کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون سے ایک بلا منصوبہ متغیر کے احتمالی بٹاؤ نہیں ہیں۔ اپنے جواب کی وجوہات بیان کیجیے۔

(i)

X	0	1	2
P (X)	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	0	1	2	3	4
P (X)	0.1	0.5	0.2	-0.1	0.3

(iii)

Y	-1	0	1
P (Y)	0.6	0.1	0.2

(iv)

Z	3	2	1	0	-1
P (Z)	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

2۔ ایک برتن میں 5 لال اور 2 کالی گیندیں ہیں۔ دو گیندیں بلا منصوبہ نکالی گئیں ہیں۔ مان لیجیے X کالی گیندوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ X کی ممکن قدریں کیا ہیں؟ کیا X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے؟

3۔ مان لیجیے X ہیڈ اور ٹیل کی تعداد کے فرق کو ظاہر کرتا جو کہ ایک سکہ کو چھ بار ٹاس کرنے میں حاصل ہوئی ہیں۔ X کی ممکن قدریان کیا ہیں؟

4۔ مندرجہ ذیل کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

(i) ایک سکّے کو دو بار اُچھالنے میں ہیڈ کی تعداد۔

(ii) تین سکوں کو لگاتار اُچھالنے میں ٹیل کی تعداد۔

(iii) ایک سکّے کو چار بار اُچھالنے میں ہیڈ کی تعداد۔

5۔ ایک پانسہ کو دوبارہ اُچھالنے میں احتمالی بٹاؤ کی کامیابیوں کی تعداد معلوم کیجیے جہاں کامیابی اس طرح بیان کی گئی ہے

(i) 4 سے بڑا عدد

(ii) کم سے کم ایک پانسہ پر چھ کا ظاہر ہونا

6۔ 30 بلب کے ایک ڈھیر سے جس میں 6 خراب شامل ہیں، 4 بلب کا ایک نمونہ واپس رکھنے کے ساتھ بلا منصوبہ نکالا گیا ہے۔ خراب بلبوں کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

7۔ ایک سکہ جانب دار ہے اس میں ہیڈ، ٹیل کے مقابلہ میں 3 بار زیادہ واقع ہوتا ہے۔ اگر سکّے کو دوبارہ اُچھالا جائے، ٹیل کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

8۔ ایک بلا منصوبہ متغیر X ذیل احتمالی بٹاؤ رکھتا ہے:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P (X)	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

معلوم کیجیے

(i) k (ii) $P(X < 3)$

(iii) $P(X > 6)$ (iv) $P(0 < X < 3)$

9۔ بلامنصوبہ متغیر X شکل کا P(X) احتمالی بٹاؤ رکھتا ہے، جہاں K کوئی عدد ہے:

$$P(X) = \begin{cases} k, & X=0 \text{ اگر} \\ 2k, & X=1 \text{ اگر} \\ 3k, & X=2 \text{ اگر} \\ 0, & \text{ورنہ} \end{cases}$$

(a) K کی قدر معلوم کیجیے۔

(b) $P(X < 2)$، $P(X \leq 2)$، $P(X \geq 2)$ معلوم کیجیے۔

10۔ ایک صاف سکہ کی تین اُچھال میں ہیڈ کا درمیانہ عدد معلوم کیجیے۔

11۔ ایک کے بعد ایک دو پانسہ پھینکے گئے ہیں۔ اگر X چھکوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، X کی امید (Expectation) معلوم کیجیے۔

12۔ پہلے چھ مثبت صحیح اعداد سے دو اعداد بلا منصوبہ منتخب کیے گئے ہیں (بغیر واپس کیے ہوئے)۔ مان لیجیے X حاصل ہونے والے دو اعداد میں سے بڑے عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ E (X) معلوم کیجیے۔

13۔ مان لیجیے X اعداد کے حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دو صاف پانسہ پھینکے گئے ہیں۔ X کا تغیر اور معیاری انحراف (S.D) معلوم کیجیے۔

14۔ ایک جماعت میں 15 طلبا ہیں جن کی عمریں بالترتیب 14، 17، 15، 14، 21، 17، 19، 20، 16، 18، 20، 17، 16، 19 اور 20 سال ہیں۔ ایک طلبِ علم کا اس طرح انتخاب کیا گیا تاکہ ہر ایک کے منتخب ہو جانے کے برابر امکان ہیں اور منتخب ہوئے طالب علم کی عمر X ریکارڈ کی گئی ہے۔ بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی منصوبہ کیا ہے؟ X کا درمیانہ، تغیر اور معیاری انحراف (S.D) معلوم کیجیے۔

15۔ ایک میٹنگ میں %70 ممبران کسی بھی تجویز کے حامی ہیں اور %30 ممبران مخالف ہیں۔ ایک ممبر بلا منصوبہ چنا گیا ہے اور ہم $X = 0$ لیتے ہیں اگر وہ مخالفت کرتا ہے، اور $X = 1$ اگر وہ حامی ہے۔ E (X) اور Var (X) معلوم کیجیے۔

ذیل میں سے ہر ایک کے لیے صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

16۔ ایک پانسہ کو اچھالنے پر جس کے تین طرف '1' لکھا ہوا ہے دو طرف 2، اور ایک طرف 5 لکھا ہوا ہے، سے جو اعداد حاصل ہوئے ہیں ان کا درمیانہ ہے

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

17۔ مان لیجیے ایک تاشوں کی گڈی سے دو تاش بلا منصوبہ نکالے گئے ہیں۔ مان لیجیے حاصل ہوئے اکّوں کی تعداد X ہے۔ تب E (X) کی قدر ہے

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

13.7 برنولی کی کوشش اور دور کنی بٹاؤ (Bernoulli Trials and Binomial Distribution)

13.7.1 برنولی کی جانچ (Bernoulli trials)

بہت سے تجربات قدرتی طور پر صرف دو نتیجہ ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک ٹاس کیا گیا سکہ 'ہیڈ' یا 'ٹیل' دکھاتا ہے، ایک بنائی ہوئی اشیا 'خراب' بھی ہو سکتی ہے اور 'صحیح' بھی ہو سکتی ہے، کسی سوال کا جواب 'ہاں' بھی ہو سکتا ہے اور 'نہیں' بھی، ایک انڈے میں سے بچہ 'نکلا ہے' یا 'نہیں نکلا ہے' فیصلہ 'ہاں' یا 'نہیں' ہو سکتا ہے۔ اس طرح کی معمولات میں، رسمی طور پر یہ کہنا کہ نتیجہ ایک 'کامیابی' ہے اور دوسرا 'کامیابی نہیں ہے' یا 'فیل ہو گیا ہے۔ مثال کے طور پر، ایک سکہ کو اُچھالنے میں، اگر ہیڈ کا وقوع ہونا ایک کامیابی ہے، تب ٹیل کا وقوع ہونا ناکامیابی ہوتا ہے۔

ہم ہر مرتبہ سکہ کو ٹاس کرتے ہیں یا پانسہ کو اچھالتے ہیں یا کوئی بھی دوسرا تجربہ کرتے ہیں، ہم اسے ایک جانچ کہتے ہیں۔ مان لیجیے اگر ایک سکہ کو 4 بار ٹاس کیا گیا ہے، جانچ کی تعداد 4 ہے۔ جس میں ہر ایک میں دو وقوع ہیں کامیابی یا فیل ہونا کسی بھی کوشش کا نتیجہ اور دوسرے کی کوشش کے نتیجے سے مبرّہ ہوتا ہے۔ اس طرح کی ہر ایک کوشش میں، کامیابی یا غیر کامیابی کا احتمال مستقل رہتا ہے۔ اس طرح کی غیر تابع کوشش جس میں دو طرح کے نتائج کا عام طور پر حوالہ دیا گیا ہے 'کامیابی' یا 'ناکامیابی' کو برنولی کی کوشش کہتے ہیں۔

تعریف8: ایک بلامنصوبہ تجربہ کی کوشش کو برنولی کی کوشش کہتے ہیں، اگر وہ مندرجہ ذیل شرائط کو مطمئن کر دیں

(i) کوشش کی تعداد محدود ہونی چاہیے۔

(ii) کوشش آزاد ہونی چاہئیں۔

(iii) ہر ایک کوشش میں بالکل دو نتائج ہوتے ہیں: کامیابی یا ناکامیابی۔

(iv) کامیابی کا احتمال ہر ایک کوشش میں یکساں رہتی ہے۔

مثال کے طور پر، ایک پانسہ کو 50 مرتبہ اچھالنا، 50 مرتبہ برنولی کی کوشش کا ایک کیس ہے، جس میں ہر ایک کوشش کا نتیجہ کامیابی ہے (مان لیجیے ایک جفت عدد) یا غیر کامیابی (ایک طاق عدد) اور کامیابی کا احتمال (P) تمام 50 بار پھینکنے کے لیے یکساں ہے۔ صاف طور پر، پانسہ کا لگاتار اچھالنا آزاد تجربات ہیں۔ اگر ایک پانسہ صحیح ہے اور چھ اعداد '1 تا 6' اس کی چھ طرف لکھے ہوئے ہیں، تب $\frac{1}{2}$ = P اور $q = 1 - P = \frac{1}{2}$ فیل ہونے کا احتمال

مثال30: چھ گیندیں ایک برتن میں سے جن میں 7 لعل اور 9 کالی گیندیں ہیں، لگاتار نکالی گئیں۔ بتایئے کہ کیا گیندوں کو نکالنے کی کوشش برنولی کوشش ہے یا نہیں جبکہ ہر بار گیند نکالنے کے بعد

(i) واپس رکھی گئی ہے (ii) برتن میں واپس نہیں رکھی گئی۔

حل:

(i) کوششوں کی تعداد محدود ہے۔ جبکہ گیند کو نکالنے کا کام واپس رکھنے کے ساتھ کیا گیا ہے، کامیابی کا احتمال (مان لیجیے، لال گیند کے لیے) $P = \frac{7}{16}$ ہے جو کہ تمام چھ جانچ کے لیے یکساں ہے (نکالنے کے لیے)۔ اس لیے، واپس رکھنے کے ساتھ گیندوں کو نکالنا برنولی کوشش ہے۔

(ii) جبکہ گیندوں کو بغیر واپس رکھے گئے نکالا ہے، کامیابی کا احتمال (یعنی، لال گیند کی) پہلی جانچ میں $\frac{7}{16}$ ہے، دوسری کوشش میں $\frac{6}{15}$ ہے، اگر نکالی گئی پہلی گیند لال ہے یا $\frac{7}{15}$ ہے اسی طرح نکالی گئی پہلی گیند کالی اور اسی طرح آگے۔ صاف طور پر، کامیابی کا احتمال تمام جانچوں کے لیے یکساں نہیں ہے، اس لیے کوشش برنولی کوشش نہیں ہے۔

13.7.2 دورکنی بٹاؤ (Binomial distribution)

ایک سکّے کے اُچھالنے کے تجربہ پر غور کیجیے جس میں ہر ایک کوشش کا نتیجہ ایک کامیابی ہے (مان لیجیے ہیڈ) یا ناکامیابی (ٹیل)۔

مان لیجیے S اور F بالترتیب کامیابی اور ناکامیابی کو ہر کوشش میں ظاہر کرتے ہیں۔ مان لیجیے ہماری دلچسپی ان طریقوں کو معلوم کرنے میں ہے جس میں ہمیں چھ کوششوں میں ایک بار کامیابی ملتی ہے۔

صاف طور پر، وہاں چھ مختلف کیس ہیں جن کی ذیل میں فہرست بنائی گئی ہے:

SFFFFF, FSFFFF, FFSFFF, FFFSFF, FFFFSF, FFFFFS

اسی طرح، دو کامیابیاں اور 4 ناکامیابیاں میں $\frac{6!}{4! \times 2!}$ اجتماع رکھ سکتی ہے۔ ان طریقوں کی فہرست بنانا ایک لمبا کام ہے۔ اس لیے، کامیابی سے 0، 1، 2، ...n اعداد کے احتمالات کا حساب لگانا ایک لمبا اور وقت برباد کرنے والا ہے۔ n برنولی کوشش میں احتمالات کے لیے کامیابیوں کی تعداد معلوم کرنے میں لمبا حساب لگانا اور تمام ممکن کیسوں کی فہرست بنانے سے بچنے کے لیے ایک ضابطہ معلوم کیا گیا ہے۔ اس کام کے لیے ہم ایک تجربہ کو لیتے ہیں جو کہ تین برنولی کوشش سے بنا ہوا ہے اور جس کی احتمالات ہر ایک کوشش میں بالترتیب کامیابی اور غیر کامیابی کے لیے P اور $q = 1 - P$ ہیں۔ تجربہ کی سیمپل فضا کے لیے سیٹ ہے

S = {SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF}

کامیابی کی تعداد ایک بلامنصوبہ متغیر X ہے اور جو 0، 1، 2 یا 3 قدریں لے سکتا ہے۔ کامیابیوں کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ مندرجہ ذیل کی طرح ہے:

$$P(X = 0) = P(\text{کوئی کامیابی نہیں})$$

$$= P(\{FFF\}) = P(F)\, P(F)\, P(F)$$

$$= q \,.\, q \,.\, q. = q^3 \quad (\text{کیونکہ جانچیں آزاد ہیں})$$

$$P(X = 1) = P(\text{ایک کامیابی})$$

$$= P(\{SFF, FSF, FFS\})$$

$$= P(\{SFF\}) + P(\{FSF\}) + P(\{FFS\})$$

$$= P(S)\, P(F)\, P(F) + P(F)\, P(S)\, P(F) + P(F)\, P(F)\, P(S)$$

$$= p.q.q + q.p.q + q.q.p = 3pq^2$$

$$P(X = 2) = P(\text{دو کامیابیاں})$$

$$P(X = 2) = P\,(\text{دو کامیابیاں})$$

$$= P(\{SSF, SFS, FSS\})$$

$$= P(\{SSF\}) + P(\{SFS\}) + P(\{FSS\})$$

$$= P(S)\,P(S)\,P(F) + P(S)\,P(F)\,P(S) + P(F)\,P(S)\,P(S)$$

$$= p.p.q. + p.q.p + q.p.p = 3p^2q$$

اور

$$P(X = 3) = (\text{تین کامیابیاں}) = P(\{SSS\})$$

$$= P(S) \,.\, P(S) \,.\, P(S) = p^3$$

اس طرح، X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X	0	1	2	3
P (X)	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

ساتھ ہی، $(q + p)^3$ کا دورکنی پھیلاؤ ہے

$$q^3 + 3q^2 p + 3q^2 + p^3$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ 0، 1، 2 یا 3 کی کامیابیوں کا احتمال بالترتیب $(q + p)^3$ کے پھیلاؤ میں پہلا، دوسرا، تیسرا، اور چوتھا رکن ہیں۔

ساتھ ہی، کیونکہ $q + p = 1$ ہے، اس سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ ان احتمالات کا حاصل جمع، جیسا کہ امید تھی '1' ہے۔

اس طرح، n- برنولی کی کوشش کے ایک تجربہ میں ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ $(q + p)$ n کے پھیلاؤ میں، 0، 1، 2، ... n کی کامیابیوں کے احتمالات پہلے، دوسرے ...$(n + 1)$ ارکان ہیں۔ اس ادعا (نتیجہ) کو ثابت کرنے کے لیے، ہمیں n- برنولی کوشش میں x- کامیابیوں کا احتمال معلوم کرنا چاہیے۔

صاف طور پر، x کامیابیوں (S) کے کیس میں، $(n - x)$ ناکامیابیاں (F) ہوں گی۔

اب، x کامیابیاں (S) اور $(n - x)$ ناکامیابیاں (F)، $\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$ طریقوں سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔

ان میں سے ہر ایک طریقے میں، x کامیابیوں کے احتمالات اور $(n - x)$ ناکامیوں کے احتمالات ہیں۔

$$= P\,(x \text{ کامیابیاں}) \qquad P\,(n - x) \text{ ناکامیابیاں}$$

$$= \underbrace{P(S).P(S)...P(S)}_{x \text{ مرتبہ}} \quad \underbrace{P(F).P(F)...P(F)}_{(n-x) \text{ مرتبہ}} = p^x \; q^{n-x}$$

اس طرح، n – برنولی کوشش میں x کامیابیوں کے احتمال $\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x \; q^{n-x}$ ہے یا ${}^nC_x p^x \; q^{n-x}$

اس طرح، P (x کامیابیاں) $= {}^nC_x p^x q^{n-x} =, \quad x = 0, 1, 2,...,n. \; (q = 1 - p)$

صاف طور پر، P (x کامیابیاں)، یعنی ${}^nC_x p^x q^{n-x}$ دورکنی پھیلاؤ $(q+p)^n$ میں $(x+1)^{th}$ رکن ہے۔

اس طرح، ایک تجربہ میں جس میں n – برنولی کی کوشش شامل ہے کامیابیوں کی تعداد کے احتمالی بٹوارے کو $(q+p)^n$ کے دورکنی پھیلاؤ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے، X کامیابیوں کے بٹاؤ کی تعداد کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

X	0	1	2	...	x	...	n
P (X)	${}^nC_0 \; q^n$	${}^nC_1 \; q^{n-1}p^1$	${}^nC_2 \; q^{n-2}p^2$		${}^nC_x \; q^{n-x}p^x$		${}^nC_n \; p^n$

مندرجہ بالا احتمالی بٹاؤ کو n اور p پیرامیٹر کے ساتھ دورکنی بٹاؤ کہا جاتا ہے، کیونکہ دی ہوئی قدروں n اور p کے لیے، ہم مکمل احتمالی بٹاؤ معلوم کرسکتے ہیں۔

x کامیابیوں کے احتمال $P(X = x)$، $P(x)$ سے بھی ظاہر کیے جاتے ہیں اور اس طرح دی گئی ہے

$$P(x) = {}^nC_x \, q^{n-x}p^x, \quad x = 0, 1,..., n. \; (q = 1 - p)$$

یہ $P(x)$ دورکنی بٹاؤ کا احتمالی تفاعل کہلاتا ہے

n– برنولی کوشش کے ساتھ اور ہر کوشش میں کامیابیوں کے احتمال P کی طرح ایک دورکنی بٹاؤ کو $B(n, P)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب ہمیں کچھ مثالیں لینی چاہیے۔

مثال 31: اگر ایک صاف سکّے کو دس بار ٹاس کیا گیا ہے، تو احتمال معلوم کیجیے

(i) قطعی چھ ہیڈ کی

(ii) کم سے کم چھ ہیڈ کی

(iii) زیادہ سے زیادہ چھ ہیڈ کی

حل: ایک سکّے کے دہرائے گئے ٹاس برنولی کوشش ہیں۔ مان لیجیے ایک تجربہ میں 10 جانچ کو X ہیڈ کی تعداد سے کو ظاہر کیا گیا ہے۔

صاف طور پر، X دورکنی بٹاؤ رکھتا ہے، $n = 10$ اور $P = \frac{1}{2}$ کے ساتھ

اس لیے $\quad P(X = x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x,\ x = 0, 1, 2, ..., n$

یہاں $\quad n = 10,\ p = \frac{1}{2},\ q = 1 - p = \frac{1}{2}$

اس لیے $\quad P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^x = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

اب

(i) $\quad P(X = 6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{6! \times 4!} \frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512}$

(ii) $\quad P$ (کم سے کم چھ ہیڈ) $= (P(X \geq 6)$

$$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{10!}{6! \times 4!}\right) + \left(\frac{10!}{7! \times 3!}\right) + \left(\frac{10!}{8! \times 2!}\right) + \left(\frac{10!}{9! \times 1!}\right) + \left(\frac{10!}{10!}\right)\right] \frac{1}{2^{10}} = \frac{193}{512}$$

(iii) $\quad P$ (زیادہ سے زیادہ چھ ہیڈ) $= P(X \leq 6)$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$+ P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+ {}^{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$$

مثال 32: ایک انڈوں کے ڈھیر سے جس میں 10% خراب انڈے ہیں دس انڈے کامیابی سے واپسی کے ساتھ نکالے گئے ہیں۔اس کی احتمالی معلوم کیجیے کہ نکالے گئے انڈوں میں کم سے کم ایک خراب انڈہ ہے۔

حل: مان لیجیے نکالے گئے 10 انڈوں میں خراب انڈوں کی تعداد X سے ظاہر کی گئی ہے۔ کیونکہ انڈوں کا نکالنا بدلاؤ کے ساتھ ہے، اس لیے کوشش برنولی کوشش ہے۔ صاف طور پر، X دورکنی بٹاؤ ہے جس میں $n = 10$ اور $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ہے

اس لیے $$q = 1 - p = \frac{9}{10}$$

اب $$\text{P (کم سے کم ایک انڈا خراب ہے)} = P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - {}^{10}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1 - \frac{9^{10}}{10^{10}}$$

مشق 13.5

1۔ ایک پانسہ کو 6 بار اچھالا گیا ہے۔ اگر ''ایک ناطق عدد حاصل کرنا'' ایک کامیابی ہے، تو بتایئے کہ مندرجہ ذیل کا کیا احتمال کیا ہے

(i) 5 کامیابیوں کی؟ (ii) کم سے کم 5 کامیابیوں کی؟

(iii) زیادہ سے زیادہ 5 کامیابیوں کی؟

2۔ پانسہ کا ایک جوڑا 4 بار اچھالا گیا ہے۔ اگر دوہرے اعداد (ڈبلیٹ) ملنے کو ایک کامیابی سمجھا جائے، تو دو کامیابیوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

3۔ اشیا کے ایک بہت بڑے ڈھیر میں 5% اشیا خراب ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ 10 نمونوں میں سے ایک سے زیادہ اشیا خراب نہ ہوں؟

4۔ 52 تاشوں کی ایک اچھی طرح پھینٹی گئی گڈی سے 5 تاش واپس رکھنے کے ساتھ کامیابی کے ساتھ نکالے گئے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ

(i) تمام پانچ پتے حکم کے ہیں؟

(ii) صرف تین پتے حکم کے ہیں؟

(iii) کوئی بھی حکم کا نہیں ہے؟

5۔ ایک بلب جو کہ ایک فیکٹری کے ذریعے تیار کیا گیا ہے کا احتمال 0.05 ہے کہ 150 دن میں فیوز ہو جائے گا۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ اس طرح کے 5 بلبوں میں

(i) کوئی نہیں

(ii) ایک سے زیادہ نہیں

(iii) ایک سے زیادہ

(iv) کم سے کم ایک

استعمال کے 150 دن بعد فیوز (Fuse) ہو جائے گا۔

6۔ ایک تھیلے میں 10 گیندیں ہے اور ہر ایک پر 0 تا 9 ہندسہ بنا ہوا ہے۔ اگر تھیلے سے واپس رکھنے کے ساتھ چار گیندیں کامیابی سے نکالی گئی ہیں، اس کا کیا احتمال ہے کہ نکالی گئی گیندوں میں سے کسی پر بھی 0 کا ہندسہ نہیں بنا ہوا ہے؟

7۔ ایک امتحان میں، 20 سوالات صحیح۔غلط طرح کے معلوم کیے گئے ہیں۔ مان لیجیے ایک طلب علم اپنے ہر سوال کا جواب معلوم کرنے کے لیے ایک اچھے سکہ کو اُچھالتا ہے۔ اگر سکہ پر ہیڈ آتا ہے، وہ جواب صحیح کا دیتا ہے اگر اس پر ٹیل آتا ہے، وہ جواب غلط کا دیتا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ کم سے کم 12 سوالوں کے صحیح جواب دے گا؟

8۔ مان لیجیے X کا ایک دورکنی بٹاؤ $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ ہے۔ دکھایئے کہ $X = 3$ سب سے زیادہ ممکن نتیجہ ہے۔

(اشارہ: $P(X = 3)$ تمام $P(x_i), x_i = 0,1,2,3,4,5,6$ میں عظیم ہے

9۔ ایک کثیر جوابی (Multiple choice) امتحان میں ہر ایک پانچ سوالوں کے لیے تین ممکن جوابات ہیں، اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک طالب علم صرف اندازہ سے چار یا اس سے زیادہ صحیح جواب دے گا؟

10۔ ایک آدمی 50 لاٹریوں میں ایک لاٹری ٹکٹ خریدتا ہے، جن میں سے ہر ایک میں اس کا انعام جیتنے کا چانس ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ انعام جیتے گا۔ (a) کم سے کم ایک مرتبہ (b) صرف ایک بار (c) کم سے کم دو مرتبہ

11۔ ایک پانسہ کو 7 بار اچھالنے میں بالکل دو بار 5 حاصل ہونے کا احتمال کیا ہے۔

12۔ ایک اکیلے پانسہ کو 6 مرتبہ اچھالنے میں زیادہ سے زیادہ 2 چھکے حاصل ہونے کا کیا احتمال ہے۔

13۔ یہ معلوم ہے کہ کچھ بنائی گئی اشیا میں 10 فی صد اشیا خراب ہیں۔ اس کا احتمال ہے کہ اس طرح کی 12 اشیا کہ بلا منصوبہ نمونوں میں، 9 خراب ہیں؟

ذیل ہر ایک میں، صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

14۔ ایک باکس جس میں 100 بلب ہیں، 10 خراب ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ 5 بلبوں کے نمونے میں، کوئی بھی خراب نہیں ہے۔

(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

15۔ اس کا احتمال کہ ایک طالب علم تیراک نہیں ہے $\frac{1}{5}$ تب اس کا کیا احتمال کہ 5 طلبا میں سے، 4 تیراک یہ ہیں۔

(A) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

متفرق مثالیں

مثال 33: جیسا کہ جدول میں دکھایا گیا ہے رنگین گیندیں چار ڈبوں میں بانٹی گئی ہیں:

ڈبہ	رنگ			
	کالا	سفید	لال	نیلا
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

ایک ڈبہ کو بلا منصوبہ چنا گیا ہے اور تب چنے گئے ڈبے سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی گئی ہے۔ گیند کا رنگ کالا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ نکالی گئی گیند ڈبہ III سے ہے۔

حل: مان لیجیے A، E_1، E_2، E_3 اور E_4 وقوعات ہیں جیسا کہ نیچے بیان کیا گیا ہے۔

A : ایک کالی گیند چنی گئی ہے

E_1 : ڈبہ I چنا گیا ہے

E_2 : ڈبہ II چنا گیا ہے

E_3 : ڈبہ III چنا گیا ہے

E_4 : ڈبہ IV چنا گیا ہے

کیونکہ ڈبہ بلا منصوبہ چنے گئے ہیں۔

اس لیے $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

ساتھ ہی $P(A|E_1) = \frac{3}{18},\ P(A|E_2) = \frac{2}{8},\ P(A|E_3) = \frac{1}{7}$ اور $P(A|E_4) = \frac{4}{13}$

$P(E_3|A) = P$ (ڈبہ III چنا گیا ہے، دیا گیا ہے کہ نکالی گئی گیند کالی ہے) $= P(E3|A)$، بائیس مسئلہ سے

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3)\cdot P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

مثال 34: دورکنی بٹاؤ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے X بلا منصوبہ متغیر ہے جس کا احتمالی بٹاؤ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ہے۔

یہاں $n = 4,\ p = \frac{1}{3}$ اور $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ہم جانتے ہیں کہ $P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}\left(\frac{1}{3}\right)^x,\ x = 0, 1, 2, 3, 4$

یعنی، X کا بٹاؤ ہے

x_i	$P(x_i)$	$x_i P(x_i)$
0	${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^4$	0
1	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$
2	${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2\left({}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$
3	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$
4	${}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4\left({}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

اب درمیانہ (μ) $= \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(x_i) =$

$$= 0 + {}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot{}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot{}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\cdot{}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 4\times\frac{2^3}{3^4} + 2\times 6\times\frac{2^2}{3^4} + 3\times 4\times\frac{2}{3^4} + 4\times 1\times\frac{1}{3^4}$$

$$= \frac{32+48+24+4}{3^4} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

مثال 35: ایک گولی چلانے والے کا ایک نشانہ کو مارنے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔ وہ (لڑکا)(لڑکی) کم سے کم کتنی مرتبہ گولی چلائے تا کہ نشانہ کو مارنے کا احتمال کم سے کم 0.99 سے ایک زیادہ ہو؟

حل: مان لیجیے گولی چلانے والا n مرتبہ گولی چلاتا ہے۔ صاف طور پر، n مرتبہ گولی چلانا n برنولی جانچ ہے۔ ہر ایک جانچ میں

p = نشانہ کو مارنے کا احتمال = $\frac{3}{4}$ اور q = نشانہ کو نہ مارنے کا احتمال =

تب $\quad P(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x = {}^nC_x\left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\left(\frac{3}{4}\right)^x = {}^nC_x\,\frac{3^x}{4^n}$

اب، دیا گیا ہے کہ،

P (کم سے کم ایک بار نشانہ کو مارنا) > 0.99

یعنی، $\quad P(x \ge 1) > 0.99$

اس لیے، $\quad 1 - P(x = 0) > 0.99$

یا $\quad 1 - {}^nC_0\,\frac{1}{4^n} > 0.99$

یا $\quad {}^nC_0\,\frac{1}{4^n} < 0.01 \quad \text{i.e.}\ \frac{1}{4^n} < 0.01$

یا $\quad 4^n > \frac{1}{0.01} = 100 \qquad \ldots (1)$

n کی قلیل قدر جو نامساوات (1) کو مطمئن کرتی ہے 4 ہے۔

اس طرح، گولی چلانے والا کم سے کم 4 مرتبہ گولی چلائے

مثال 36: A اور B ایک پانسہ کو باری باری سے اچھالتے ہیں جب تک ایک کو '6' حاصل نہیں ہو جاتا اور کھیل جیت جاتے ہیں۔ ان کے جیتنے کے اپنے اپنے احتمالات معلوم کیجیے اگر A پہلے شروع کرتا ہے۔

حل: مان لیجیے S کامیابی کو ظاہر کرتا ہے ('6' حاصل ہونے کی) اور F ناکامی کو ظاہر کرتا ہے۔ ('6' نہ حاصل ہونے کی)۔

اس طرح، $P(S) = \frac{1}{6},\ P(F) = \frac{5}{6}$

$$P(\text{A پہلی بار اچھالنے میں جیتا ہے}) = P(S) = \frac{1}{6}$$

A کو تیسری بار اچھالنے کا موقعہ ملتا ہے، جبکہ A پہلی بار اچھالنے پر اور B دوسری بار اچھالنے پر ناکامیاب ہو جاتا ہے۔

اس لیے، $P(\text{A تیسری بار اچھالنے میں جیتتا ہے}) = P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

اور اس طرح آگے $P(\text{A پانچویں بار اچھالنے میں جیتتا ہے}) = P(FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$

اس لیے، $P(\text{A جیتتا ہے}) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

$$P(\text{B جیتتا ہے}) = 1 - P(\text{A جیتتا ہے}) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

ریمارک (Remark) اگر $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots,$ جہاں $|r| < 1$ ہے۔ تب اس لامحدود G.P کا مجموعہ $\frac{a}{1-r}$ سے دیا گیا ہے (گیارھویں کلاس کی کتاب کے A. 1. 3 کے حوالے سے)

مثال 37: اگر مشین کو صحیح طور پر سیٹ کیا گیا ہے، یہ 90% قابل قبول اشیا بناتی ہے۔ اگر اسے غلط طور پر سیٹ کیا گیا ہے تو یہ 40% قابل قبول اشیا بناتی ہے۔ پچھلا تجربہ یہ بتاتا ہے کہ 80% مشین کو صحیح سیٹ کیا جاتا رہا ہے۔ اگر کچھ سیٹ کرنے کے بعد، مشین 2 قابل قبول اشیا بناتی ہے، اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ مشین کو صحیح طور پر سیٹ کیا گیا ہے۔

حل: مان لیجیے A وہ واقعہ ہے جس میں مشین 2 قابل قبول اشیا بناتی ہے۔

ساتھ ہی مان لیجیے کہ B_1 صحیح سیٹ ہونے کا واقعہ ہے اور B_2 غلب سیٹ ہونے کا واقعہ ہے۔

اب $P(B_1) = 0.8, P(B_2) = 0.2$

$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9$ اور $P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$

اس لیے
$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.9 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

باب 13 پر مبنی متفرق مشق

1۔ A اور B دو وقوعات ہیں جب کہ $P(A) \neq 0$ ۔ $P(B|A)$ معلوم کیجیے، اگر

(i) A، B کا ذیلی سیٹ ہے (ii) $A \cap B = \phi$

2۔ ایک جوڑے کے دو بچے ہیں۔

(i) اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں لڑکے ہیں، اگر یہ پہلے ہی سے معلوم ہے کہ ایک لڑکا ہے۔

(ii) اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں لڑکیاں ہیں، اگر یہ پہلے ہی سے معلوم ہے کہ بڑا بچہ لڑکی ہے۔

3۔ یہ مان لیجیے کہ 5% مردوں اور 0.25% عورتوں کے بال سرمئی ہیں۔ ایک سرمئی بالوں والا انسان بلا منصوبہ چنا گیا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ انسان مرد ہے؟ یہ مان لیجیے کہ مرد اور عورتوں کی تعداد برابر ہے۔

4۔ یہ مان لیجیے کہ 90% انسان دائیں ہاتھ سے کام کرتے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ چنے گئے 10 انسانوں میں بلا منصوبہ چنے گئے 6 انسان دائیں ہاتھ سے کام کرتے ہیں؟

5۔ ایک برتن میں 25 گیندیں ہیں جن میں سے 10 گیندوں پر X کا نشان بنا ہوا ہے اور باقی 15 پر Y کا نشان بنا ہوا ہے۔ برتن میں سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی گئی، اس کا نشان نوٹ کر کے پھر اسے برتن میں واپس ڈال دیا گیا ہے۔ اگر اسی طرح 6 گیندیں نکالی گئی ہیں، تو اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) تمام پر 'X' کا نشان ہوگا۔

(ii) دو سے زیادہ پر 'Y' کا نشان ہوگا۔

(iii) کم سے کم ایک گیند پر 'Y' کا نشان ہوگا۔

(iv) 'X' نشان اور 'Y' نشان والی گیندوں کی تعداد برابر ہوگی۔

(iv) 'X' نشان اور 'Y' نشان والی گیندوں کی تعداد برابر ہوگی۔

6۔ ایک رکاوٹی دوڑ میں، ایک کھلاڑی کو 10 رکاوٹیں کراس کرنی ہیں۔ اس کا $\frac{5}{6}$ احتمال ہے کہ وہ ہر رکاوٹ کو پار کر لے گا اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ دو سے کم رکاوٹوں کو گرا دے گا؟

7۔ ایک پانسہ کو بار بار اچھالا گیا ہے جب تک تین چھکے حاصل نہیں ہو گئے۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ تیسرا چھکہ پانسہ کو چھٹی مرتبہ اچھالنے میں حاصل ہوا ہے۔

8۔ اگر ایک لیپ کا سال بلا منصوبہ چنا گیا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ اس میں 53 منگل موجود ہیں۔

9۔ ایک تجربہ جتنی بار فیل ہوتا ہے اس سے دوگنی مرتبہ کامیاب ہوتا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ اسے اگلی چھ کوششوں میں، کم سے کم 4 مرتبہ کامیابی مل جائے گی۔

10۔ ایک غیر جانب دار سکہ کو ایک آدمی کتنی بار اُچھالے تا کہ کم سے کم ایک ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال 90 فی صد سے زیادہ ہو؟

11۔ ایک کھیل میں، ایک آدمی چھ کے لیے ایک روپیہ جیتتا ہے اور کسی دوسرے عدد کے لیے ایک روپیہ کا نقصان اٹھاتا ہے جبکہ ایک غیر جانب دار پانسہ پھینکا گیا ہے۔ آدمی یہ تہیہ کرتا ہے کہ وہ پانسہ کو تین مرتبہ اچھالے گا لیکن اسی وقت کھیل کو چھوڑ دے گا جب چھ آ جائے گا۔ اس کی جیتی ہوئی / ہاری ہوئی رقم کی قدر معلوم کیجیے۔

12۔ مان لیجیے ہمارے پاس چار باکس A، B، C اور D ہیں جن میں رنگین کنچے ہیں ہے جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

ڈبہ	سنگ مرمر کا رنگ		
	لال	سفید	کالا
A	1	6	3
B`	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

ایک باکس بلا منصوبہ چنا گیا ہے اور اس میں سے اکیلا کنچہ نکالا گیا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ باکس A سے نکالا گیا ہے؟ باکس B سے؟ باکس C سے؟

13۔ مان لیجیے کہ ایک مریض کو دل کا دورا پڑنے کے امکانات 40% ہیں۔ یہ بھی مان لیا گیا ہے کہ مراقبہ (Meditation) اور یوگا کا کورس کرنے سے دل کا دورا پڑنے کا خطرہ 30% کم ہو جاتا ہے اور مختلف دواؤں کے استعمال سے یہ امکان 25% کم ہو جاتا ہے۔ بیک وقت مریض دونوں ممکنات میں سے ایک کو چن سکتا ہے۔ جن کا احتمال برابر ہے۔ یہ دیا ہوا ہے کہ دونوں میں سے ایک ممکنات کا استعمال بلامنصوبہ چن کر مریض کو دل کا دورہ پڑ گیا۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ مریض نے مراقبہ (Meditation) اور یوگا کا کورس کیا ہوگا؟

14۔ اگر دوسرے درجہ کے مقطعہ کا ہر عنصر صفر یا ایک ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ مقطعہ کی قدر مثبت ہے؟ (یہ مان لیجیے کہ مقطعہ کے الگ اندراج آزادی سے چنے گئے ہیں، ہر ایک قدر $\frac{1}{2}$ احتمال کی مانی گئی ہے۔)

15۔ ایک الیکٹرونک اسمبلی کے مان لیجیے A اور B دو ماتحت نظام ہیں۔ پچھلی جانچ کے طریقوں سے، مان لیا گیا ہے کہ ذیل احتمالات پہلے ہی سے معلوم ہیں۔

P (A فیل ہوجاتا ہے) = 0.2

P (B اکیلا فیل ہوجاتا ہے) = 0.15

P (A اور B فیل ہوجاتے ہیں) = 0.15

ذیل احتمالات کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) P (A اکیلا فیل ہوجاتا ہے) (ii) P (A فیل ہوجاتا ہے | B پہلے ہی فیل ہو چکا ہے)

16۔ بیگ I میں 3 لال اور 4 کالی گیندیں ہیں اور بیگ II میں 4 لال اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ ایک گیند بیگ I سے بیگ II میں منتقل کی گئی ہے اور پھر ایک گیند بیگ II سے نکالی گئی ہے۔ نکالی گئی گیند لال رنگ کی پائی گئی ہے۔ اس کا احتمالات معلوم کیجیے۔ منتقل کی گئی گیند کالی ہے۔

ذیل ہر ایک میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

17۔ A اور B دو وقوعات ہیں تا کہ $P(A) \neq 0$ اور $P(B \mid A) = 1$ ہے، تب

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

18۔ اگر $P(A|B) > P(A)$ ہے، تب ذیل میں کون سا صحیح ہے۔

(A) $P(B|A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) . P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

19۔ اگر A اور B دو وقوعات ہیں تا کہ $P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B) = P(A)$ ہو، تب

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$ (D) $P(A|B) = 0$

خلاصہ

باب کے خاص مقاصد یہ ہیں —

- ایک وقوعہ E کا مشروط احتمال، جبکہ واقعہ F کی وقوع دی ہوئی ہے P (E|F) سے دی گئی ہے۔

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \neq 0$$

- $0 \leq P(E|F) \leq 1$, $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

$P((E \cup F)|G) = P(E|G) + P(F|G) - P((E \cap F)|G)$

- $P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E),\ P(E) \neq 0$

$P(E \cap F) = P(F)\, P(E|F),\ P(F) \neq 0$

- اگر E اور F غیر تابع ہیں، تب

$P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

$P(E|F) = P(E),\ P(F) \neq 0$

$P(F|E) = P(F),\ P(E) \neq 0$

- **مکمل احتمال کا مسئلہ**

مان لیجیے کہ $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ سیمپل فضا کا بٹاؤ ہے اور مان لیجیے کہ ہر ایک غیر صفر احتمال رکھتا ہے۔ مان لیجیے A کوئی بھی S کے ساتھ جڑا ہوا وقوعہ ہے، تب

$P(A) = P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + ... + P(E_n)\, P(A|E_n)$

- **بائیس کا مسئلہ** اگر $E_1, E_2, ..., E_n$ وقوعات ہیں جو کہ سیمپل فضا S کا بٹوارہ کرتے ہیں، یعنی $E_1, E_2, ..., E_n$

جوڑوں کے حساب سے غیر مشترک ہیں اور $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ ہے اور A کوئی غیر صفر احتمالی کے ساتھ وقوعہ ہے، تب

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}$$

- ایک بلامنصوبہ متغیر ایک حقیقی قدر والا تفاعل ہے جس کا علاقہ ایک بلامنصوبہ تجربہ کی سیمپل فضا ہے۔
- ایک بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ اعداد کا نظام ہے۔

$$X \;:\; x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n$$

$$P(X) : \; p_n \quad p_n \quad ... \quad p_n$$

جہاں $p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, i = 1, 2, ..., n$

- مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ بالترتیب احتمالات $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔ X کا درمیانہ، جو کہ μ سے ظاہر کیا جاتا ہے $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ عدد ہے۔
بلامنصوبہ متغیر X کا درمیانہ X کی امید (Expectation) بھی کہلاتا ہے، جسے E(x) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ بالترتیب احتمالیوں $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)$ کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔
مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ بالترتیب احتمالات $p(x_1), p(x_2), ... p(x_n)$ بیان کی گئی ہے۔

$$\sigma_x^2 \text{ یا } Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

اور برابری کے طور پر $\sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$

غیر منفی عدد $\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)}$

بلامنصوبہ X کا معیاری انحراف (S.D) کہلاتا ہے۔

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

- ایک بلامنصوبہ تجربہ کی (کوشش) برنولی کی کوشش کہلاتی ہے، اگر وہ ذیل شرطوں کو مطمئن کرے۔
  (i) (کوشش) کی تعداد محدود ہونی چاہیے۔
  (ii) کوشش آزاد ہونی چاہیے۔
  (iii) ہر کوشش کے دو نتائج ہوتے ہیں: کامیابی یا ناکامیابی
  (iv) ہر ایک کوشش میں کامیابی کا احتمال یکساں رہتا ہے۔

دورکنی بٹاؤ کے لیے $B(n, p)$, $P(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x} p^x$, $x = 0, 1, ..., n$ $(q = 1 - p)$

تاریخ کے اوراق

پانسہ کے کھیل میں امیروں کو ناپنے کا شروعاتی اظہار 1477 میں ڈنٹے ڈیئون کے مزاحیہ بحث میں ظاہر ہوا۔ جوئے پر ایک مضمون جس کا نام لائبر ڈی لیڈ و والا سے ہے، جرونیمو کارڈن (Geronimo Carden) نے (1501-1576) میں شائع ہوا تھا جو کہ اپنے والد کے انتقال کے بعد 1663 میں پیدا ہوا تھا۔ اس مضمون میں ہر واقعہ کے لیے ان کے مطابق کیسوں کی تعداد دیتا ہے جب دو پانسہ اچھالے گئے ہوں۔

گلیلیو (1564-1642) نے تین پانسوں کے ایک کھیل میں عام ریمارک د جن کا واسطہ موقع کی صحیح قیمت کا اندازہ لگانا تھا۔ گلیلیو نے یہ نچوڑ نکالا کہ جب تین پانسہ پھینکے گئے ہیں، ان پانسوں پر ظاہر ہونے والے اعداد کا مجموعہ زیادہ امید ہے کہ 10 ہوگا بجائے مجموعہ 9 کے، کیونکہ 10 کی طرف داری کرنے والے کیسوں کی تعداد 9 کی طرف داری کرنے والے کیسوں کی تعداد سے زیادہ ہے۔

ان پہلی معلومات کے علاوہ، عام طور سے یہ مانا جاتا ہے کہ احتمال کی سائنس کی صحیح شروعات سترھویں صدی میں دو اعلیٰ آدمیوں پاسکل (Pascal) (1623-1662) اور پیرے ڈی فرمیٹ (Pierre de Fermat) کے درمیان خط وکتابت میں واقع ہے۔ فرانس کے ایک جواری چیویلر ڈی میٹرے (Chevalier de Metre) نے پاسکل سے دریافت کیا کہ اسے بتایا جائے کہ اس کی وجوہات کے نظریہ اور جوئے سے جمع کی گئی مشاہدات میں کچھ دکھائی دینے والا کیا مختلف ہے۔ 1654 کے اردگرد لکھی گئی ہے خطوں کی ایک سلسلے میں پاسکل اور فرٹ نے احتمال کی سائنس کی پہلی

بنیاد رکھی تھی۔ پاسکل نے مسئلوں کا حل الجبرا کے طریقے سے کیا جبکہ فرمیٹ نے اجتماعی طریقہ کا استعمال کیا تھا۔

ہولینڈ کے اعلی سائنس داں ہوجنس (Huygens)(1629-1665) پاسکل اور فرمیٹ کے درمیان ہوئی مراسلات کے ذخیرے سے وابستہ ہوا اور احتمال پر پہلی کتاب "De Ratiociniis in Ludo Aleae" شائع کی جس میں بہت سے دلچسپ مسئلوں کے حل ہیں اس کے بجائے کہ کھیلوں میں مواقع کا احتمال مشکل مسئلوں کے لیے معلوم کیا جائے۔

اس کے بعد احتمال کے نظریہ پر اعلیٰ کام جیکب برنولی Jacob Bernoulli (1654-1705) کی ایک اعلیٰ کتاب "Ars Conjectendi" کی شکل میں 1713 میں ان کے مرنے کے بعد ان کے بھتیجے Nicholes Bernoulli نے شائع کرائی۔ ان ہی کے نام پر ایک بہت اہم احتمال کا بٹوارہ جسے ہم دور کی بٹوارہ کہتے بھی ہیں ابھی باقی ہے۔ اس کے آگے احتمال پر بہت اہم کام 1993 میں اے۔ این۔ کول گورو A. N. Kolmogorov (1903-1987) نے کیا جو کہ احتمال کے بعد ہی نظریہ کے ساتھ وقوع میں ہے اس کی کتاب ، احتمال کی بنیاد 1993 (Foundations of probability) میں شائع ہوئی، جس نے احتمال کا ایک سیٹ فنکشن کے طور پر متعارف کرایا اور جسے 'پہلی قطار کا کام' سمجھا جاتا ہے۔