



5013CH15

15 احتمال (PROBABILITY)

نظریہ احتمال اور نظریہ اغلاط دونوں ہی اب ان مسائل کے ایک بڑے مجموعے کی تشکیل کرتے ہیں جو نہ صرف ریاضی کی دلچسپی کا خاص موضوع ہیں بلکہ عمل اعتبار سے بھی غیر معمولی ریاضیاتی اہمیت کے حامل ہے۔
آر۔ ایس۔ ووڈ وارڈ (R.S. Woodward)

1.1 تعارف

جماعت کلاس میں اپنے وقوعات کی تجرباتی (یا علمی) احتمال کے بارے پڑھا تھا جس کی بنیاد اصل تجربات کے نتائج پر تھی۔ ہم نے مسئلہ سکھ کو 1000 مرتبہ اچھالے جانے والے تجربہ پر بحث کی تھی جس میں کا تعداد تھا۔

ہیڈ : 445 ٹیل : 545

اس تجربہ کی بنیاد کی بنا پر ہیڈ آنے کا علمی (Empirical) احتمال $\frac{455}{1000}$ یعنی 0.455 اور ٹیل آنے کا احتمال 0.545 (نویں جماعت کی ریاضی کی درسی کتاب کے باب 15 کی مثال 1 بھی دیکھئے) نوٹ کیجئے کہ ان احتمال کی بنیاد ایک سکھ کو 1000 بار اچھالے جانے والے اصل تجربہ کے نتائج پر ہے۔ اس وجہ سے یہ تجرباتی یا علمی احتمال کہلاتے ہیں۔ دراصل تجرباتی احتمالوں کی بنیاد اصل تجربات کے نتائج اور وقوعات کے واقع ہونے بہتر ریکارڈنگ پر ہے۔ مزید یہ احتمال صرف اندازے ہیں اگر ہم اسی تجربہ کو ایک بار پھر 1000 مرتبہ دہرائیں ہمیں مختلف اعداد و شمار ملیں گے جس کی وجہ سے احتمال کے اندازے بھی مختلف ہوں گے۔

نویں کلاس میں آپ نے ایک سکھ کو کئی مرتبہ اچھالا تھا اور جتنی مرتبہ ہیڈ یا ٹیل آیا تھا اس کو نوٹ کیا تھا (باب 15 کی سرگرمی 1 اور 2 دیکھیے) آپ نے یہ بھی نوٹ کیا تھا کہ جیسے جیسے اپنے سکھ کو اچھالنے کی تعداد بڑھائی تھی، ہیڈ (پائیں) آنے کا احتمال

عدد $\frac{1}{2}$ کو نزدیک تر ہوتا گیا۔ نہ صرف آپ نے بلکہ دنیا کے مختلف حصوں میں بہت سے لوگوں نے اس قسم کے تجربے کئے اور ہیڈ (یا ٹیل) کے آنے کی تعداد کو ریکارڈ کیا۔

مثال کے طور پر 18 ویں صدی کے ایک فرانسیسی Comte de Buffon نے ایک سکہ کو 4040 مرتبہ اچھالا اور اس نے پایہ کو 2048 ہیڈ آئے۔ اس طرح سے اس حالت میں ہیڈ آنے کا تجرباتی استعمال $\frac{2048}{4040}$ یعنی 0.507 تھا۔ برطانیہ کے Kerrich نے ایک سکہ کو 10,000 مرتبہ اچھال کر ہیڈ آنے کی تعداد نوٹ کی جو کے 5067 تھی، اس حالت میں ہیڈ آنے کا تجرباتی احتمال $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ شماریات داں کارل پیرسن کو اس میں کچھ اور وقت لگایا اس نے 24000 مرتبہ سکہ کو اچھالا، اب فرض کیجئے ہم پوچھتے ہیں کہ اگر ہم اس تجربہ کو 1 ملین یا 10 ملین مرتبہ دہرائیں تو تجرباتی احتمال کیا ہوگا؟ اب وجدانی طور پر محسوس کریں گے جیسے جیسے سکہ کے اچھالے جانے کی تعداد بڑھے گی، ہیڈ یا ٹیل کے آنے کی تعداد ایک عدد 0.5 یعنی $\frac{1}{2}$ کے گرد ہی مرکوز ہوتی نظر آتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ ہیڈ کے (پائیں کے) آنے تو تھیوریٹکل احتمال کہتے ہیں۔ جیسا کہ آپ اگلے سیکشن میں دیکھیں گے۔ اس باب میں ہم کسی وقوعہ کی تھیوریٹکل (یا کلاسیکل) احتمال سے آپ کو متعارف کرائیں گے اور اس تصور پر بنیاد مسئلوں پر بحث کریں گے۔

15.2 احتمال: ایک نظریاتی طریقہ کار

آئیے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

مان لیجئے ایک سکہ کو بلا منصوبہ اچھالا گیا

جب ہم کسی سکہ کے بارے میں بات کرتے ہیں ہم یہ مان کے چلتے ہیں کہ یہ فیئر ہوگا یعنی ایسی کوئی وجہ نہیں ہوگی یہ صرف ہیڈ میں آئے یا ٹیل میں آئے۔ سکہ کی اس خاصیت کو ہم غیر جانب دارانہ (unbiased) کہتے ہیں جبکہ بلا منصوبہ اچھالنا سے مراد ہے کہ سکہ آزادانہ طور پر بغیر کسی مداخلت کے زمین پر گرے۔

ہم پہلے جانتے ہیں کہ سکہ صرف دو ممکنہ طریقوں سے زمین پر آئے گا یا ہیڈ کی طرف یا ٹیل کا (ہم اس امکان کو خارج کرتے ہیں کہ یہ اپنے کنارے پر کھڑا گرے، جو کے ممکن ہو سکتا ہے) اگر سکہ کسی ریت پر گرے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ہر ایک نتائج ہیڈ یا ٹیل کے واقع ہونے کے برابر ہیں ہم اس کو کہتے ہیں کہ نتائج ہیڈ یا ٹیل مساوی امکانی ہیں۔

مساوی امکانی نتائج کی ایک اور مثال مان لیجیے ہم ایک پانسہ کو پھینکتے ہیں۔ پانسہ سے ہماری مراد انصاف پر مبنی ہمیشہ ایک پانسہ ہوتا ہے۔ ممکنہ نتائج کتنے ہیں؟ یہ ہیں 1, 2, 3, 4, 5, 6 ہر نمبر کے آنے کا احتمال یکساں ہے۔ اس لئے ایک پانسہ کو پھینکنے پر مساوی امکان نتائج ہیں 1, 2, 3, 4, 5 اور 6

کیا ہر ایک تجربہ کے نتائج مساوی امکانی ہوتے ہیں؟ آئیے دیکھتے ہیں۔

مان لیجئے ایک بیگ میں 4 لال اور 1 نیلی گیند ہے اور آپ بیگ میں دیکھے بغیر ایک گیند نکالتے ہیں نتائج کیا ہیں۔ کیا لال گیند اور نیلی گیند کے آنے کے نتائج مساوی امکانی ہیں؟ کیونکہ بیگ میں 4 لال گیندیں ہیں اور 1 لال گیند اس لئے اب اس بات سے اتفاق کریں گے کہ لال گیند کے آنے کے امکان نیلی گیند کے مقابلہ میں زیادہ ہیں۔ اس لئے (لال گیند یا نیلی گیند) کے نتائج مساوی امکان نہیں ہیں جب کہ کسی بھی رنگ کی گیند آنے کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔ اس لئے یہ ضروری نہیں کہ تمام تجربوں کے نتائج مساوی امکانی ہوں۔

لیکن اس باب میں صرف ان تجربات پر بحث کریں گے جس کے نتائج مساوی امکانی ہوں

نویں کلاس میں ہم نے کسی وقوعہ کا تجربہ باقی یا علمی احتمال کو ہم نے اس طرح معرف کیا تھا۔

$$P(E) = \frac{\text{کوشش (trial) کی وہ تعداد جس میں وقوعہ واقع ہوتا ہے}}{\text{کوششوں (trials) کی کل تعداد}}$$

احتمال کی علمی ترجمان کا استعمال ہر ایک ایسے وقوعہ کے لئے کر سکتے ہیں جو کسی ایسے تجربہ سے منسلک ہو جس کی تکرار کثیر تعداد میں دہرائی جائے۔ بہت سی صورت حال میں کسی تجربہ کی تکرار کی کچھ پابندیاں ہیں، جیسے یا تو یہ کافی مہنگا ہو سکتا ہے یا اس صورت حال کے مطابق نہیں ہے لیکن یہ سکہ اچھالنے یا شے کو پھینکنے کے سلسلہ میں یہ بہت بہتر طور پر کام کرتا ہے لیکن سکی سٹیلا بٹ کو () کرنے کے تجربہ جس سے اس کے launch کے وقت ناکام ہونے کا علمی احتمال کو دہرانہ یا زلزلہ کے عمل کو علمی احتمال معلوم کرنے کے لئے دہرانہ کہ زلزلہ کے دوران کثیر منزلہ عمارتیں برباد ہوتی ہیں؟

ایسے تجربہ جن میں ہم کچھ مفروضات کے لئے ذہنی طور پر تیار ہوتے ہیں تجربہ کی تکرار سے بچا سکتا ہے۔ کیونکہ مفروضات درست طریقہ سے صحیح احتمال معلوم کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ مساوی امکانی نتائج کا مفروضہ (جو کہ بہت سے تجربوں کے لئے Valid ہوتا ہے، جیسے اوپر دی گئی سکہ اور یا شے کی دو مثالیں) ایک ایسا مفروضہ ہے جس کی وجہ سے ہم کسی وقوعہ کے احتمال کی مندرجہ ذیل تعریف ملتی ہے۔

ایک وقوعہ E کی تھورٹیکل (یا کلاسیکل احتمال) احتمال جس P(E) لکھتے ہیں، معرف ہے

$$P(E) = \frac{E \text{ کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج}}$$

جہاں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ نتائج مساوی امکائی ہیں، ہم تھورٹیکل احتمال کو مختصراً احتمال لکھیں گے۔ احتمال کی تعریف

1795 میں Pierre Simon Laplace نے کی



پیرس سائمن لپلاسیس
(1749 – 1827)

احتمال کے نظریہ کی شروعات 16 ویں صدی میں ہوئی جب ایک اطالوی ریاضی داں J. Cardan نے اس مضمون پر ایک کتاب لکھی، امکان کے کھیل پر کتاب، جب سے یہ (احتمال) وجود میں آیا، احتمال کے مطالعہ نے اپنے زمانے کے عظیم ریاضی دانوں James Bernoulli (1654–1705)، A. de Moivre (1667–1754) اور Pierre Simon Laplace ان میں کچھ ایسے نام ہیں جنہوں نے اس میدان میں بہت کچھ تعاون کیا۔ Laplace کی Theorie Analytique des Probabilités, 1812 احتمال کے نظریہ کے سلسلہ میں کسی ایک شخص کا سب سے عظیم تعاون سمجھا جاتا ہے۔ موجودہ سالوں میں احتمال کثرت سے استعمال، حیاتیات، معاشیات، جینیات، طبیعیات اور سماجیات میں ہوتا ہے۔

آئیے ان تجربات سے جڑے وقوعات کا احتمال معلوم کرتے ہیں، جو جن کے نتائج مساوی امکائی ہیں۔

مثال 1: جب ایک سکہ کو ایک بار اچھالا جاتا ہے تو ہیڈ آنے کا احتمال معلوم کیجیے۔ ٹیل آنے کا احتمال بھی معلوم کیجیے۔

حل: سکہ کے اچھالنے کے تجربہ میں ممکنہ نتائج کی تعداد 2 ہے۔ ہیڈ اور ٹیل T مان لیجیے E، ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے، E ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے، E کے موافق نتائج (یعنی ہیڈ کا آنا) 1 ہے اس لئے

$$P(E) = \frac{E \text{ کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}} = \frac{1}{2}$$

اسی طرح سے F ٹیل کے آنے کی وقوعہ ہے؛ تب

$$P(F) = P(\text{ٹیل}) = \frac{1}{2} \quad (\text{کیوں؟})$$

مثال 2: ایک بیگ میں ایک لال گیند، ایک نیلی گیند اور ایک پیلی گیند ہے، تمام گیندیں ایک ہی سائز کی ہیں۔ کریٹیکا اس بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک گیند باہر نکالتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے۔ کہ اس

(i) پہلی گیند نکالی (ii) لال گیند نکالی (iii) نیلی گیند نکالی

حل: کارٹک نے بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک گیند نکالی ہے، تو اس لئے ہر مساوی امکانی ہے کہ کسی بھی رنگ کی گیند نکالی گئی ہو۔

مان لیجئے Y ایک وقوعہ ہے، پہلی گیند باہر نکالنے کا وقوعہ ہے نیلی گیند باہر نکالنے کا وقوعہ ہے لال بال نکالنے کا

اب ممکنہ نتائج کی تعداد = 3

(i) وقوعہ Y کے موافق نتائج = 1

اس لئے $P(Y) = \frac{1}{3}$

اسی طرح سے (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ اور $P(B) = \frac{1}{3}$

ریمارک:

1- ایک ایسا وقوعہ جس کا تجربہ میں صرف ایک نتائج ہو بنیادی وقوعہ کہلاتا ہے مثال 1 میں دونوں وقوعات E اور F بنیادی وقوعات میں ہے۔ اسی طرح سے مثال 2 میں تمام وقوعات B, Y اور R بنیادی وقوعات ہیں

2- مثال (1) میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ: $P(E) + P(F) = 1$

مثال 2 میں ہم نوٹ کرتے ہیں: $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

مشاہدہ کیجئے کہ ایک تجربہ کے تمام بنیادی وقوعات کے احتمال کا حاصل جمع 1 ہوتا ہے یہ عمومی طور پر بھی صحیح ہے۔

مثال 3: فرض کیجئے ہم ایک پانسہ کو ایک مرتبہ پھینکتے ہیں (i) 4 سے بڑے عدد آنے کا احتمال کیا ہے؟ (ii) 4 سے چھوٹے یا برابر کے عدد آنے کا احتمال کیا ہے۔

حل: یہاں E، 4 سے بڑے عدد آنے کا وقوعہ ہے، ممکنہ نتائج کی تعداد ہے 1, 2, 3, 4, 5, 6 اور E کے موافق نتائج ہیں

5 اور 6۔ اس لئے E کے موافق نتائج کی تعداد ہے 2۔ اس لئے

$$P(E) = P(4 \text{ سے بڑے عدد}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) مان لیجئے F، 4 کے برابر یا چھوٹے عدد آنے کا وقوعہ ہے

ممكنہ نتائج = 6

وقوعہ F کے موافق نتائج 1,2,3,4

اس لئے F کے موافق نتائج کی تعداد 4 ہے

$$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

کیا مذکورہ بالا مثال میں وقوعات E اور F بنیادی وقوعات ہیں؟ نہیں یہ نہیں ہیں کیونکہ F کے 2 نتائج ہیں اور F کے 4 نتائج ہیں۔

ریمارک: مثال (i) سے ہم نوٹ کرتے ہیں کہ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

جہاں E، ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے اور F ٹیل آنے کا وقوعہ ہے مثال 3 کے (i) اور (ii) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

جہاں E، >4 عدد آنے کا وقوعہ اور F، ≤4 عدد آنے کا وقوعہ ہے۔

نوٹ کیجیے کہ ایسا عدد حاصل کرنا جو 4 سے بڑا نہیں ہے، ایسا ہی جیسے 4 سے چھوٹا یا اس کے برابر پر عدد حاصل کرنا اور اس کا برعکس بھی

اوپر (1) اور (2) میں E، F نہیں، کے جیسا نہیں ہے 9 ہاں یہ ٹھیک ہے ہم وقوعہ E نہیں ہے کو $\bar{E}$ سے ظاہر کرتے ہیں

$$P(E) + P(\text{not } E) = 1$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \quad \text{یعنی} \quad P(E) + P(\bar{E}) = 1 \quad \text{جس سے ہمیں ملتا ہے}$$

عمومی طور پر یہ صحیح ہے کہ ایک وقوعہ E کے لئے

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

تب وقوعہ $\bar{E}$ ، جو not E کو ظاہر کرتا ہے وقوعہ E کا تہہ کہلاتا ہے

ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ E اور $\bar{E}$ ایک دوسرے کے تہی وقوعات میں complementary

آگے بڑھنے سے پہلے آئیے مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب معلوم کریں

(i) پانسہ کے ایک بار پھینکے جانے پر 7 سے کم عدد کے آنے کا احتمال کیا ہے۔

اس لئے (i) کا جواب دیتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ پانسہ کو ایک بار پھینکنے پر صرف چھ ممکنہ نتائج ہیں۔ یہ نتائج ہیں 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 کیونکہ پانسہ کے کسی رخ پر بھی 8 مارک نہیں ہے اس لئے 8 کے موافق کوئی بھی نتائج نہیں ہے یعنی ایسے نتائج کی تعداد صفر ہے، دوسرے لفظوں میں پانسے کے ایک بار پھینکنے جانے پر 8 کا آنا ناممکن ہے۔

$$P(8 \text{ آنے کا}) = \frac{0}{6} = 0 \quad \text{اس لئے}$$

یعنی ایسا وقوعہ کا احتمال جس کا واقع ہونا ناممکن ہے۔ صفر ہوتا ہے اور ایسا وقوعہ ناممکن وقوعہ کہلاتا ہے۔

آئیے (ii) کا جواب دیں

کیونکہ پانسہ کے ہر رخ پر 7 سے چھوٹا عدد مارک ہے۔ اس لئے پانسہ کے ایک بار پھینکنے جانے پر یقینی ہے کہ 7 سے چھوٹا عدد آئے، اس لئے موافق نتائج کی تعداد وہی ہے جو تمام ممکنہ نتائج کی جو 6 ہے۔

$$P(E) = P(7 \text{ سے چھوٹا عدد آنے کا}) = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{اس لئے}$$

اس لئے ایسا وقوعہ کا احتمال جو یقینی ہو، 1 ہوتا ہے۔ اور ایسا وقوعہ یقینی کہلاتا ہے۔

نوٹ: احتمال $P(E)$ کی تعریف سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ شمار کنندہ (وقوعہ E کے موافق نتائج کی تعداد) ہمیشہ نسب نما (تمام ممکنہ نتائج کی تعداد) سے چھوٹا یا برابر ہوتا ہے۔

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad \text{اس لئے}$$

آئیے اب تاش کے پتوں سے متعلق کچھ مثالیں لیتے ہیں، کیا آپ نے تاش کے پتوں کو دیکھا ہے؟ اس میں 52 پتے ہوتے ہیں جو 4 قسم کے ہوتے ہیں (suit) ہر سوٹ کے 13 پتے ہوتے ہیں۔ حکم، (♠) پان، (♥) اینٹ، (♦) اور چڑی یا پھول چڑی (♣) اور حکم کا لے اور پان اور اینٹ لال رنگ کے ہوتے ہیں ہر ایک سوٹ 13 میں تاش ہوتے ہیں، اکا، بادشاہ، بیگم، غلام، 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10، بادشاہ بیگم، غلام، face cards کہلاتے ہیں۔

مثال 4: اچھی طرح پھینٹے گئے تاش کے 52 پتوں میں سے ایک کارڈ نکالا جاتا ہے احتمال معلوم کیجیے کہ پتہ (Card)

(i) اکا ہے

(ii) اکا نہیں ہے

حل: اچھی طرح پھینٹنے کا مطلب ہے مساوی امکاناتی نتائج

(i) تاش کی ایک گڈی میں 4 کے ہوتے ہیں۔ مان لیجیے E، ا کا آنے کا وقوع ہے

E کے موافق نتائج ہیں = 4

ممکنہ نتائج کی تعداد ہے = 52 (کیوں؟)

$$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad \text{اس لئے}$$

(ii) مان F، نکال لیا گیا پتہ ا کا نہیں ہے، آنے کا وقوع ہے

وقوع F کے موافق نتائج کی تعداد ہے = 48 = 52 - 4 (کیوں؟)

ممکنہ نتائج کی تعداد = 52

$$P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13} \quad \text{اس لئے}$$

ریمارک: نوٹ کیجیے F وہی جو $\bar{E}$ ہے اس لئے ہم $P(F)$ کی تحسب اس طرح بھی کر سکتے ہیں

$$P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

مثال 5: دو کھلاڑی، سنگیتا اور ریشما ایک ٹینس میچ کھیلتی ہیں۔ ایسا مانا جاتا ہے کہ سنگیتا کے میچ جیتنے کا احتمال 0.62 ہے۔ ریشما کے جیتنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے S اور R بالترتیب سنگیتا کے جیتنے، ریشما کے جیتنے کے وقوعات ہیں

(دیا ہوا ہے) $P(S) = 0.62$ = سنگیتا کے جیتنے کا احتمال ہے۔

$P(R) = 1 - P(S)$ = ریشما کے جیتنے کا احتمال ہے

کیونکہ وقوعات S اور R متضامی ہیں۔

$$= 1 - 0.62 = 0.38$$

مثال 6: سویتا اور حمیدہ آپس میں دوست ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں کی یوم پیدائش (i) مختلف ہوگی (ii) ایک ہی ہوگی؟ (لیپ کے سال کو نظر انداز کرتے ہوئے)

حل: دونوں دوستوں میں سے ایک لڑکی، مان لیجیے سویتا کا یوم پیدائش سال کا کوئی سا بھی دن ہو سکتا ہے اور حمیدہ کا یوم پیدائش

365 دنوں میں سے کوئی سا بھی دن ہو سکتا ہے۔

ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ یہ 365 نتائج مساوی امکائی ہیں۔

(i) اگر حمیدہ کا یوم پیدائش سویتا سے مختلف ہے، تب اس کے یوم پیدائش کے موافق نتائج کی تعداد ہے۔ $365 - 1 = 364$

اس لئے $P = \frac{364}{365}$ (حمیدہ کا یوم پیدائش سویتا کے یوم پیدائش سے مختلف ہے) P

(ii) (دونوں کے یوم پیدائش مختلف ہوں) $1 - P = 1 - P$ (حمیدہ اور سویتا کا ایک ہی یوم پیدائش ہو) P

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\bar{E}) = 1 - P(E)]$$

$$= \frac{1}{365}$$

مثال 7: ایک اسکول کی 10 ویں کلاس میں 40 طلباء ہیں جن میں 25 لڑکیاں اور 15 لڑکے ہیں، کلاس کے نمائندے کی حیثیت سے کلاس ٹیچر کو ان میں سے ایک کا انتخاب کرنا ہے۔ وہ ہر ایک طالب علم کا نام یکساں قسم کے کارڈس پر لکھتی ہے۔ پھر وہ ان کارڈس کو ایک تھیلہ میں رکھ کر اچھی طرح ہلا دیتی ہے پھر وہ اس تھیلہ میں سے ایک کارڈ باہر نکالتی ہے احتمال معلوم کیجیے کہ کارڈ پر لکھا ہوا نام (i) ایک لڑکی کا ہے؟ (ii) ایک لڑکے کا

حل: 40 طلباء ہیں اور صرف ایک کارڈ (جس پر نام لکھا ہوا ہے) کا انتخاب ہونا ہے۔

(i) تمام ممکنہ نتائج کی تعداد = 40

کارڈ جس پر لڑکی کا نام لکھا ہوا اس کے موافق نتائج کی تعداد = 25 (کیوں؟)

$$P = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} \quad \text{اس لئے } P = \frac{25}{40}$$

(ii) کارڈ جس پر لڑکے کا نام لکھا ہوا اسکے موافق نتائج کی تعداد = 15 (کیوں؟)

$$P = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \quad \text{اس لئے } P = \frac{15}{40}$$

نوٹ: ہم (لڑکا) P کو اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

$$P(\text{لڑکا}) = 1 - P(\text{لڑکا نہیں}) = 1 - P(\text{لڑکی}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

مثال 8: ایک بیگ میں 3 نیلے، 2 سفید اور 4 لال کچے (Marble) ہیں۔ اگر ایک کچہ بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ یہ ہوگا۔

(i) سفید کچہ؟ (ii) نیلا کچہ؟ (iii) لال کچہ

حل: تمام کچوں کا نکالا جانا مساوی امکائی ہے کہنے کے بجائے یہ زیادہ آسان ہے کہ کہا جائے کہ کچے بلا منصوبہ نکالے گئے۔ ممکنہ نتائج کی تعداد $= 3 + 2 + 4 = 9$ (کیوں؟)

مان لیجئے W، کچہ سفید ہے، آنے کا وقوعہ اور B نیلے کچہ کے آنے کا وقوعہ اور R کچہ لال ہے۔ آنے کا وقوعہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) وقوعہ W کے موافق نتائج کی تعداد = 2

$$P(W) = \frac{2}{9} \quad \text{اس لئے}$$

$$P(R) = \frac{4}{9} \quad \text{اور} \quad P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{(ii) اسی طرح سے}$$

$$P(W) + P(B) + P(R) = 1 \quad \text{نوٹ کیجئے کہ}$$

مثال 9: ہر پریت دو مختلف سکہ ایک ساتھ اچھالتی ہے (مان لیجئے 1 ایک روپیہ کا اور دوسرا 2 روپیہ کا سکہ ہے) احتمال معلوم کیجئے کہ کم سے کم ایک ہیڈ آئے۔

حل: ہم ہیڈ کے لئے H اور ٹیل کے لئے T لکھتے ہیں جب دو سکہ ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں تو ممکنہ نتائج ہیں (H, H), (H, T), (T, H), (T, T)، جو کے تمام مساوی امکائی ہیں، یہاں (H, H) کا مطلب ہے پہلے سکے پر ہیڈ (یعنی 1 روپے کے سکہ پر) اور دوسرے سکے پر ہیڈ (یعنی 2 روپیہ کے سکے پر) اسی طرح سے (H, T) کا مطلب ہے پہلے سکے پر ہیڈ اور دوسرے پر ٹیل اور اسی طرح باقی سبھی۔

وقوعہ E کم سے کم ایک ہیڈ کے موافق نتائج ہیں (H, H), (H, T), (T, H) (کیوں؟)

اس لئے E کے موافق نتائج کی تعداد ہے جو 3 ہے۔

$$P(E) = \frac{3}{4} \text{ اس لئے}$$

یعنی ہر پریت کا کم سے کم ایک ہیڈ آنے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔

نوٹ: آپ $P(E)$ ایسے بھی معلوم کر سکتے ہیں

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (P(\bar{E}) = P(\text{No. شیڈ.}) = \frac{1}{4} \text{ کیونکہ})$$

کیا آپ نے مشاہد کیا، کہ اب تک جتنی بھی مثالیں ہم نے دیکھی: تمہیں ایک تجربہ کے نتائج متناہی ہیں؟ اگر نہیں تو جانچ کیجیے؟

بہت سے ایسے تجربات بھی ہیں جن میں نتائج دودے ہوئے نمبروں میں سے ایک ہوتا ہے۔ یا جس میں دائرہ یا مستطیل کے اندر کوئی نقطہ ہوتا ہے وغیرہ، کیا اب آپ تمام ممکنہ نتائج کی تعداد کو گن سکتے ہیں؟ جیسے کہ آپ جانتے ہیں۔ یہ ممکن نہیں کیونکہ دودے ہوئے اعداد کے درمیان لامحدود اعداد ہوتے ہیں اسی طرح دائرہ کے اندر لامحدود نقطے ہوتے ہیں۔ اس لئے اب تک آپ نے کلاسیکل احتمال کی جو تعریف پڑھی ہے وہ اس شکل میں استعمال نہیں ہو سکتی؟ تو پھر اس کا حل کیا ہے؟ اس کا جواب دینے کے لئے ہم مندرجہ مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 10: میوزیکل کرسی کے ایک کھیل میں، اس شخص کو، جو میوزک بجا رہا ہے یہ نصیحت کی جاتی ہے کہ وہ کھیل شروع کے دو منٹ کے اندر ہی اندر میوزک بجانا بند کر دے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ کھیل شروع ہونے کے بعد پہلے ہی آدھے منٹ میں میوزک رک جاتا ہے۔

حل: یہاں ممکنہ نتائج 0 اور 2 کے درمیان تمام اعداد ہیں، یہ عودی خط میں 0 اور 2 کے درمیانہ کا حصہ ہے (شکل 15.1 دیکھیے)

مان لیجئے E ، میوزک پہلے آدھے منٹ میں رک جاتا ہے، کا وقوعہ ہے

اس لئے E کی موافقت میں نتائج، عددی خط 0 سے $\frac{1}{2}$ تک کے اعداد ہیں۔

0 سے 2 کا فاصلہ ہے 2، اور 0 سے $\frac{1}{2}$ تک ہے $\frac{1}{2}$ ۔

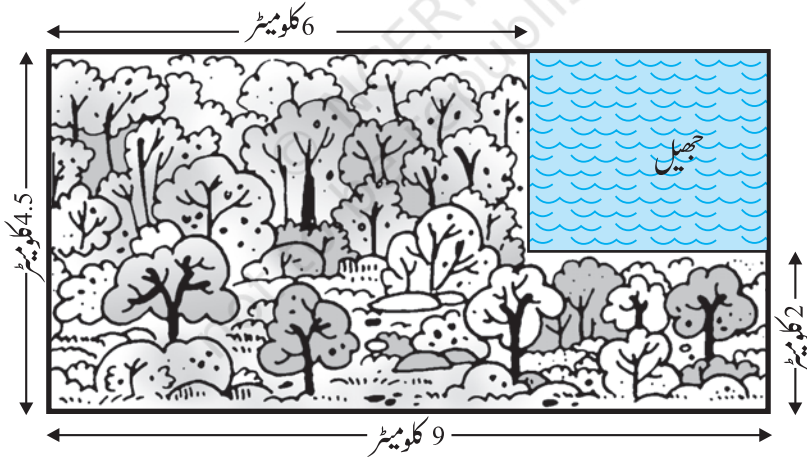
کیونکہ تمام نتائج مساوی امکائی ہیں، ہم بحث کر سکتے ہیں کہ کل فاصلہ 2 ہے اور وقوعہ E کے موافق فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

اس لئے

کیا اب ہم مثال 10 میں نکالے گئے احتمال کے Area وسیع موافق رقبہ (علاقہ) کی نسبت کے طور پر کر سکتے ہیں؟
مثال 11: یہ رپورٹ کیا گیا کہ ایک گم شدہ ہیلی کاپٹر شکل 15.2 میں دکھائے گئے ایک مستطیل خطہ میں کسی جگہ تباہ ہو گیا۔

احتمال معلوم کیجیے کہ یہ $P(E) = \frac{\text{وقوعہ E کے موافق فاصلہ}}{\text{کل فاصلہ جس میں نتائج واقع ہو سکتے ہیں}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ شکل میں دکھائی گئی
 جھیل کے اندر تباہ ہوا ہے۔

حل: ہیلی کاپٹر کے خطہ میں کسی جگہ بھی تباہ ہونا مساوی امکائی ہے۔ اس پورے خطہ کا رقبہ جہاں ہیلی کاپٹر تباہ ہو سکتا ہے۔



شکل 15.2

$$= (4.5 \times 9 \text{ km}^2 = 40.5 \text{ km}^2$$

$$(2.5 \times 3) \text{ km}^2 = 7.5 \text{ km}^2 = \text{جھیل کا رقبہ}$$

$$\text{اس لئے } P(\text{ہیلی کاپٹر جھیل میں Crash ہوا}) = \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$$

مثال 12: ایک کارٹن کے اندر 100 شرٹیں ہیں جن میں 88 شرٹیں اچھی ہیں، 8 شرٹوں میں معمولی نقص ہے اور 4 شرٹوں میں کوئی بڑا نقص ہے۔ جمی ایک ایسا تاجر ہے صرف اچھی ہی شرٹیں لینا پسند کرتا ہے لیکن ایک اور تاجر ہجرتا صرف ان شرٹوں کو نہیں قبول کرتی جن میں کوئی بڑا نقص ہے۔ کارٹن میں سے بلا منصوبہ ایک شرٹ نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) یہ شرٹ جمی کے لئے قابل قبول ہوگی؟

(ii) یہ ہجرتا کو قابل قبول ہوگی؟

حل: 100 شرٹوں کے کارٹن میں ایک شرٹ بلا منصوبہ نکالی گئی ہے۔ اس لئے یہاں 100 مساوی امکاناتی نتائج ہیں۔

(i) جمی کے موافق (یعنی قابل قبول) نتائج کی تعداد = 88 (کیوں؟)

$$\text{اس لئے } P = \frac{88}{100} = 0.88 \text{ (جمی کے لئے قابل قبول شرٹ)}$$

(ii) ہجرتا کے موافق نتائج کی تعداد = 88 + 8 = 96 (کیوں؟)

$$\text{اس لئے } P = \frac{96}{100} = 0.96 \text{ (ہجرتا کے لئے قابل قبول شرٹ)}$$

مثال 13: دو پانسہ، ایک نیلا اور ایک سلیٹی ایک ہی وقت میں پھینکے گئے۔ تمام ممکنہ نتائج لکھیے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پانسوں کی اوپری سطح پر ظاہر ہونے والے دو اعداد کا حاصل جمع

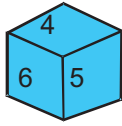
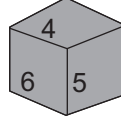
(i) 8 ہوگا؟ (ii) 13 ہوگا؟ (iii) 12 کے برابر یا اس سے کم ہوگا؟

حل: جب نیلا پانسہ 1 دکھائے گا و سلیٹی رنگ کا پانسہ ان اعداد 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 میں سے ایک دکھا سکتا ہے۔ یہی بات جب بھی صحیح ہوگی جب نیلا پانسہ 5، 4، 3، 2، یا 6 دکھائیگا۔ اس تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج مندرجہ جدول میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر ایک مرتبہ کو جوڑے ہیں۔ پہلا عدد نیلے پانسے پر ظاہر ہونے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے اور دوسرے اعداد سلیٹی پانسے پر ظاہر ہونے والے عدد کو۔

نوٹ کیجیے کہ جو مرتبہ جوڑا (1, 4)، (4, 1) سے مختلف (کیوں؟)

$$\text{اس لئے ممکنہ نتائج کی تعداد ہے } 6 \times 6 = 36$$

(i) وقوعہ E دو اعداد کا حاصل جمع 8 ہے، کے موافق نتائج ہیں۔



	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

شکل 15.3

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

یعنی E کے موافق نتائج کی تعداد 5 = E

$$P(E) = \frac{5}{36} \quad \text{اس لئے}$$

(ii) جیسا کہ آپ شکل 15.3 میں دیکھ رہے ہیں کہ ایک کوئی ممکنہ نتائج نہیں ہے جو وقوع F یعنی دو اعداد کا حاصل جمع 13

$$P(F) = \frac{0}{36} = 0 \quad \text{ہے کے موافق نہیں ہے اس لئے}$$

(iii) جیسا کہ آپ شکل 15.3 میں دیکھ سکتے ہیں وقوع G دو اعداد کے حاصل جمع 12 سے کم یا برابر ہے 12 کے موافق نتائج ہیں 36

$$P(G) = \frac{36}{36} = 1 \quad \text{اس لئے}$$

مشق 15.1

1- مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کیجیے:

(i) ایک وقوع E کا احتمال + وقوع 'not E' کا احتمال = _____

(ii) اس وقوع کا احتمال جو واقعہ نہیں ہو سکتا _____ ایسا وقوعہ _____ کہلاتا ہے۔

(iii) اس وقوعہ کا احتمال جس کا واقع ہونا یقینی ہے — ایسا وقوعہ — کہلاتا ہے۔

(iv) ایک تجربہ میں تمام بنیادی وقوعات کے احتمال کا حاصل جمع — ہوتا ہے۔

(v) کسی وقوعہ کا احتمال — سے بڑا یا برابر ہوتا ہے اور — سے چھوٹا یا برابر ہوتا ہے۔

2- مندرجہ ذیل کون سے تجربات میں مساوی امکان نتائج ہیں؟ تشریح کیجیے۔

(i) ایک ڈرائیور کار کو اسٹارٹ کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ کار اسٹارٹ ہوگی یا نہیں ہوگی۔

(ii) ایک کھلاڑی باسکٹ بال کو باسکٹ میں ڈالنے کی کوشش کرتا ہے وہ باسکٹ میں ڈال پاتی ہے یا نہیں ڈال پاتی۔

(iii) صحیح — یا غلط کے ایک سوال کے جواب دینے کی کوشش کی گئی۔ جواب صحیح یا غلط ہے۔

(iv) ایک بچے کی پیدائش ہوتی ہے۔ یہ ایک لڑکا ہے یا لڑکی

3- ایک فٹ بال کے میچ میں یہ طے کرنے کے لئے کہ کس ٹیم کو شروع میں بال ملے گی ٹاس کرنا کیوں صحیح مانا جاتا ہے؟

4- مندرجہ ذیل سے کون سا جواب کسی وقوعہ کا احتمال نہیں ہو سکتا؟

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5- اگر $P(E) = 0.05$ ، 'not E' کا احتمال کیا ہے؟

6- ایک بیگ میں صرف لیموں کی مہک والی ٹوفیاں ہیں۔ مالینی بیگ کے اندر دیکھ بغیر ایک ٹافی نکالتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے۔ اس

(i) سنترے کی مہک والی کینڈی نکالتی ہے؟

(ii) لیمو کی مہک والی کینڈی نکالی ہے؟

7- یہ دیا ہوا ہے کہ 3 طلباء کے ایک گروپ میں دو طلباء کا ایک ہی یوم پیدائش نہ ہونے کا احتمال 0.992 ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ دو طلباء کا ایک ہی یوم پیدائش ہوگا؟

8- ایک بیگ میں 3 لال گیندیں اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ بیگ میں سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ نکالی گئی گیند (i) لال؟ (ii) سفید ہے؟

9- ایک بکس میں 5 لال، 8 سفید اور 4 ہرے کچے ہیں۔ بکس میں سے ایک کچہ بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ نکالا جانے والا کچہ (i) لال ہے؟ (ii) سفید ہے؟ (iii) ہر نہیں ہے۔

(ii) 5 روپیہ کا سکہ نہیں ہوگا۔

دکاندار نے بلا منصوبہ ایک ٹینک سے جس میں 5، نر مچھلیاں 8 مادہ مچھلیاں ہیں (شکل 15.4 دیکھئے) ایک مچھلی نکالی احتمال معلوم کیجیے۔
نکالی گئی مچھلی نر ہے۔



ایک عدد کی طرف نشاندہی کرتا ہے۔ وہ عدد 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 میں سے کوئی ایک ہوتا ہے (شکل 15.5 دیکھیے) اور یہ مساوی امکانی نتائج ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ یہ نشاندہی کرے گا

(ii) ایک طاق عدد کی؟

(iv) 9 سے چھوٹے عدد کی طرف؟



13۔ ایک پانسہ کو ایک بار پھینکا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے

(i) ایک مفرد عدد آنے کا (ii) 2 اور 6 کے درمیانہ عدد آنے کا (iii) طاق عدد آنے کا

14۔ اچھی طرح پھینٹی گئی تاش کی 52 پتیوں کی گڈی سے ایک پتہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ یہ پتہ:

(i) لال رنگ کے بادشاہ کا (ii) ایک فیس کارڈ یعنی تصویر والا پتہ کا ہے (iii) ایک لال رنگ کی تصویر والا پتہ کارڈ کا

(iv) یان کے غلام کا (v) ایک حکم کے پتہ کا (vi) اینٹ کی بیگم کا

15- اینٹ کے پانچ پتے۔ ”10، غلام، بیگم بادشاہ اور اکا کو اچھی طرح پھینٹا گیا ان کے چہروں کو نیچے کی طرف کر کے پھر بلا

منصوبہ ایک پتہ نکالا گیا۔

(i) احتمال معلوم کیجیے کہ پتہ بیگم ہے۔

(ii) اگر بیگم نکالی گئی تو اس کو ایک طرف رکھ دیجئے۔ اور پھر ایک دوسرا پتہ باقی پتیوں میں سے نکالئے۔ اور احتمال بتائیے کہ

یہ پتہ (a) اکا ہے؟ (b) بیگم ہے؟

16- 12 خراب پین غلطی سے 32 اچھے پنوں میں کس ہو گئے۔ پین کو صرف دیکھ کر اب اندازہ نہیں کر سکتے کہ یہ خراب ہے یا

صحیح۔ ان پنوں میں سے ایک پین بلا منصوبہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ نکالا گیا پین صحیح ہے۔

17- (i) 20 بلبوں کے ایک ڈھیر میں 4 بلب خراب ہیں۔ اس ڈھیر میں سے بلا منصوبہ ایک بلب نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ

نکالا گیا بلب خراب ہے؟

(ii) فرض کیجئے ایک بلب نکالا گیا اور یہ خراب نہیں تھا اس لئے اس کو دوبارہ اس میں واپس نہیں رکھا گیا اب باقی بچے

بلبوں میں سے ایک اور بلب بلا منصوبہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ بلب خراب نہیں ہے؟

18- ایک بوکس میں 90 ڈسک ہیں جس پر 1 سے لے کر 90 تک کے نمبر لکھے ہوئے ہیں اگر بوکس میں سے ایک ڈسک بلا

منصوبہ نکالی جاتی ہے احتمال معلوم کیجئے کہ اس ڈسک پر (i) دو ہندسی عدد لکھا ہوگا (ii) ایک کامل مربع ہوگا (iii) 5 سے

تقسیم ہونے والا عدد ہوگا۔

19- ایک بچہ کے پاس ایک پانسہ ہے جس کے چھ رخ پر مندرجہ ذیل حروف لکھے ہوئے ہیں۔

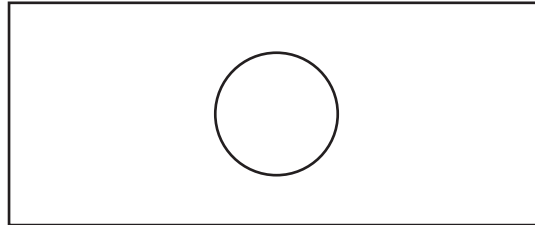
A B C D E A

پانسہ کو ایک بار پھینکا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجئے A (i) کا؟ (ii) D کا؟

20- * فرض کیجئے آپ ایک پانسہ کو بلا منصوبہ شکل 15.6 میں دکھائے گئے ایک مستطیل خطہ میں پھینکتے ہیں احتمال معلوم کیجئے کہ یہ

1 میٹر قطر والے دائرہ میں گرے گا۔

3 میٹر



شکل 15.6

21۔ ایک ڈھیر میں 144 بال ہیں جن میں 20 پین خراب ہیں اور باقی اچھے ہیں۔ نوری پین تب ہی خریدے جب یہ اچھا ہوگا۔ اگر خراب ہوگا تو یہ نہیں خریدے گی دکاندار ایک پین بغیر منصوبہ اٹھاتا ہے اور اس کو دے دیتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ۔

(i) وہ اس کو خریدے گی؟

(ii) وہ اس کو نہیں خریدے گی؟

22۔ مثال 13 کو دیکھئے (i) مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	وقوعہ دو پانسوں پر حاصل جمع
$\frac{1}{36}$				$\frac{5}{36}$						$\frac{1}{36}$	اقتسابی

(ii) ایک طالب علم بحث کرتا ہے کہ 11 ممکنہ نتائج میں 11، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11 اور 12، اس لئے ان میں سے

ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{11}$ ہے۔ کیا آپ اس دلیل سے اتفاق رکھتے ہیں؟

23۔ ایک کھیل میں ایک روپے کے سکے کو 3 مرتبہ اچھالا جاتا ہے اور ہر مرتبہ اس کے نتائج کو نوٹ کیا جاتا ہے۔ حنیف جیتے گا اگر تمام ٹوس کا نتیجہ ایک ہی ہو یعنی تین ہیڈ یا تین ٹیل ہیں تو وہ ہار جائیگا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ حنیف کھیل ہارے گا۔

24۔ ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا گیا احتمال معلوم کیجئے کہ

(i) کسی مرتبہ بھی 5 نہیں رہیگا (ii) 5 کم سے کم ایک مرتبہ آئے گا؟

[اشارہ: پانسہ کو دو بارہ اچھالا جائے یا دو پانسوں کو ایک ساتھ اچھالا جائے ایک ہی تجزیہ کہلاتا ہے]

25۔ مندرجہ ذیل میں کون سی دلیلیں صحیح ہیں اور کون سی صحیح نہیں ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بھی بتائیے۔

(i) اگر دو سکوں کو ایک ساتھ اچھالا جائے تو تین ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔ دو ہیڈ، دو ٹیل یا دونوں ایک ایک۔ اس لئے اس

میں ہر ایک نتائج کے لئے احتمال ہے $\frac{1}{3}$ ۔

(ii) اگر ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے تو اس کے دو ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔ ایک طاق عدد یا ایک جفت عدد اس لئے اگر ایک

طاق عدد آنے کا احتمال ہے $\frac{1}{2}$ ۔

مشق 15.2 (اختیاری)*

- 1- دو گاہک شام اور ایکتا ایک ہفتہ میں (منگل سے ہفتہ تک) ایک مخصوص دکان پر جاتی ہیں۔ دونوں میں سے ہر ایک کے اس دکان پر کسی نہ کسی دن جانے کے مساوی امکان ہیں۔ احتمال معلوم کیجئے کہ دونوں اس دکان پر (i) ایک ہی دن جائیں گی؟ (ii) لگاتار دو دن (جیسے منگل، بدھ، جمعرات وغیرہ؟) مختلف دنوں میں؟
- 2- ایک پانسہ پر اس طرح سے نمبر لکھے ہوئے ہیں کہ اس کے رخ جو عدد دکھاتے ہیں وہ ہیں 1, 2, 3, 4, 5, 6 اس کو دو مرتبہ پھینکا گیا اور دونوں بار پھینکنے جانے پر کل اسکور نوٹ کر لئے گئے مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجئے جس میں دونوں بار پھینکنے کے بعد میں آنے والے کل اسکور کی کچھ قدریں دی گئی ہیں

پہلی بار پھینکنے میں عدد

6	3	3	2	2	1	+
7	4	4	3	3	2	1
8	5	5	4	4	3	2
5						2
						3
9				5		3
12	9	9	8	8	7	6

دوسری بار پھینکنے میں عدد

احتمال معلوم کیجئے کہ کل اسکور ہے

- (i) ایک جفت عدد ہے (ii) 6 ہیں (iii) کم سے کم 6 ہیں
- 3- ایک بیگ میں 5 لال گیندیں اور کچھ نیلی گیندیں ہیں۔ اگر ایک نیلی گیند کے نکالے جانے کا احتمال، لال گیند نکالے جانے کا احتمال کا دگنا ہے۔ تو بتائیے کہ بیگ میں کل کتنی گیندیں نیلی ہوں گی۔
- 4- ایک بیگ میں 12 گیندیں ہیں جن میں سے x گیندیں کالی ہیں اگر بیگ میں ایک گیند بلا منصوبہ نکالی جائے، تو احتمال معلوم کیجئے کہ یہ ایک کالی گیند ہوگی؟
- اور اس بیگ میں 6 کالی گیندیں اور ڈال دی جائیں تو کالی گیند نکالے جانے کا احتمال پہلے والے احتمال کا دگنا ہوگا۔

* یہ مشق امتحان کے نقطہ نگاہ سے نہیں ہے۔

x معلوم کیجیے۔

- 5- ایک جار میں 24 کپے ہیں کچھ ہرے ہیں اور کچھ نیلے۔ اگر ایک کچہ جار میں سے بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے تو یہ ہرے اس کا احتمال $\frac{2}{3}$ ہے۔ جار میں نیلے کپوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

15.7 خلاصہ

اس باب میں مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

- 1- تجرباتی اور تھیوریٹکل احتمالوں کے درمیان فرق
- 2- ایک وقوعہ E کلاسیکل احتمال کو ہم $P(E)$ لکھتے ہیں اور اس کی تعریف اس طرح بیان کرتے ہیں۔

$$P(E) = \frac{\text{وقوعہ } E \text{ کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

جہاں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ تجربہ کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔

- 3- ایک یقینی وقوعہ کا احتمال 1 ہے۔

- 4- ایک ناممکنہ وقوعہ کا احتمال 0 ہے۔

- 5- ایک وقوعہ E کا احتمال ایک عدد $P(E)$ ہے جب کہ

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

- 6- ایک وقوعہ جس میں صرف ایک نتائج (بنیادی) وقوعہ کہلاتا ہے۔ کسی تجربہ کے تمام بنیادی وقوعات کے احتمالوں کا حاصل جمع 1 ہے۔

- 7- کسی بھی وقوعہ E کے لئے $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ جہاں $\bar{E}$ 'not E' کو ظاہر کرتا ہے، اور E' متضمتی وقوعات کہلاتے ہیں۔

قارئین کے لئے نوٹ

کسی وقوعہ کے تجرباتی یا علمی احتمال کے بنیاد اس پر ہے جو اصل میں واقع ہوا ہے۔ جبکہ کسی وقوعہ کا تھیوریٹکل احتمال کچھ مفروضوں کی بنیاد پر یہ کوشش کرتا ہے کہ کیا ہوگا۔ جیسے جیسے کسی تجربہ میں (کوششیں) کی تعداد بڑھتی جاتی ہے تجرباتی اور تھیوریٹکل احتمال تقریباً ایک سے ہوتے جاتے ہیں۔